Math93.com

Devoir Surveillé n°2A

Terminale ES

Continuité et Convexité

Durée 2 heures - Coeff. 10

Noté sur 20 points

BARÈME (sur 20 points)				Note
Exercice 1	:	4	points	
Exercice 2	:	2.5	points	
Exercice 3	:	4	points	
Exercice 4	:	9.5	points	
			Total	

Exercice 1. — 4 points

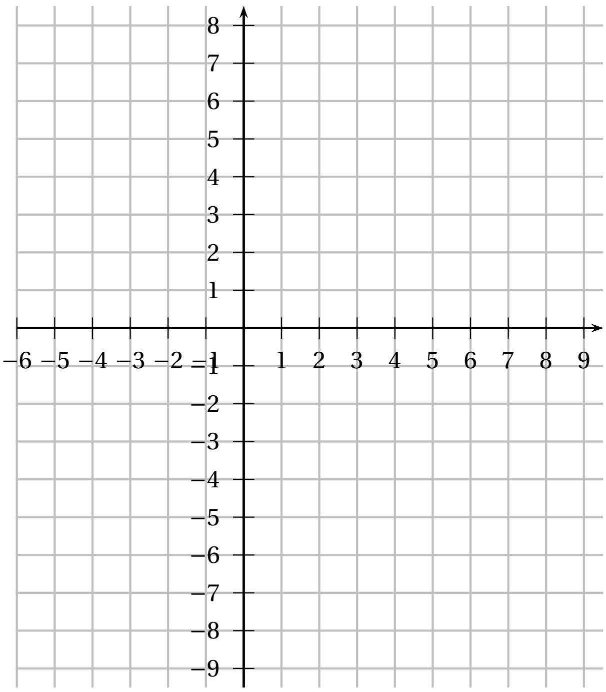
Soit g la fonction définie sur $[-1\,;\,4]$ par $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.
3. Étudier la convexité de g et montrer que la courbe $\mathscr{C}_g$ présente un point d'inflexion.
4. Montrer que l'équation $g(x) = -2$ admet une unique solution sur $[-1\,;4]$ et déterminer un encadrement de cette solution au centième.

Exercice 2. Un peu d'algorithmique — 2.5 points

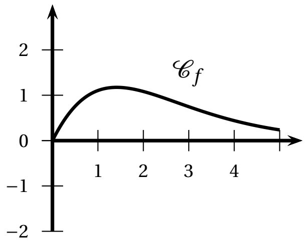
1. Écrire un algorithme qui permet de calculer l'image d'une valeur demandée, par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h : x \longmapsto h(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

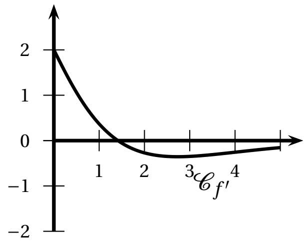


2. Tracer $\mathscr{C}_h$ dans le repère ci-contre.
3. La fonction h est-elle continue ? Justifier en utilisant la définition du cours.

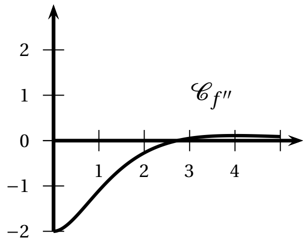
Exercice 3. Fonctions 4 points



Courbe $\mathscr{C}_f$



Courbe $\mathscr{C}_{f'}$



Courbe $\mathscr{C}_{f''}$

On donne ci-dessus la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative dans un repère donné d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;5]$ ainsi que les courbes représentatives $\mathscr{C}_{f'}$ et $\mathscr{C}_{f''}$ respectivement de la dérivée f' et de la dérivée seconde f'' de la fonction f.
Dans cette partie les réponses seront obtenues à l'aide de lectures graphiques en justifiant rapidement vos réponses.

1. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs du nombre réel pour lequel la fonction f semble atteindre son maximum.

2.

2. a. Donner un intervalle défini par deux entiers sur lequel la fonction f semble convexe.

2. b. Expliquer pourquoi on peut conjecturer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de l'abscisse de ce point d'inflexion.

3. Parmi les équations suivantes quelle est l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ? Justifier votre réponse.

a. $y = x$, **b.** $y = 2x+1$, **c.** $y = 2x$, **d.** $y = \dfrac{3}{4}x$.

Exercice 4. Avec une fonction auxiliaire 9.5 points

On considère la fonction f définie sur $[0,5\,;10]$ par :

$$f : \begin{cases} [0,5\,;10] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto \quad f(x) = \dfrac{2\,x^3 - 3\,x^2 + x + 5}{x} \end{cases}$$

1. Calculer la dérivée de f et vérifier que pour tout x de $[0,5\,;10]$:

$$f'(x) = \frac{4\,x^3 - 3\,x^2 - 5}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

2. <u>Étude d'une fonction auxiliaire g</u>.

2. a. Expliquer rapidement pourquoi f' est du signe de g sur $[0,5\,;10]$.

2. b. Étudier les variations de la fonction g sur $[0,5\,;10]$.

2. c. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0,5\,;10]$ et en donner un encadrement au millième.

2. d. En déduire le signe de g sur $[0,5\,;10]$.

2. e. En déduire alors les variations de f sur $[0,5\,;10]$.

3. <u>Applications économiques</u>.
Le coût moyen de production d'une entreprise est donné par $f(x)$ où x est la quantité produite en milliers d'unités, variant de 0,5 à 10 milliers d'unités de production, et $f(x)$ est exprimée en centaines d'euros.

3. a. Déterminer une valeur approchée à l'unité, du coût moyen minimum de production.

3. b. Déterminer, à partir de quelle production, le coût moyen dépasse les 10 600 euros.

Fin du devoir