Math93.com

Devoir Surveillé n°4A
Terminale ES
La fonction exponentielle
Durée 2 heures - Coeff. 8
Noté sur 20 points

BARÈME (sur 20 points)				Note
Exercice 1	:	4	points	
Exercice 2	:	2	points	
Exercice 3	:	14	points	
			Total	

Exercice 1. Équation et inéquation — 4 points

1. Résoudre l'équation :
$$e^{2x}+2e^{x}-3=0$$

2. Résoudre l'inéquation :
$$\left(e-e^{x}\right)\times\left(\frac{1}{e^{x}}+e^{x}\right)\geq 0$$

Exercice 2. Propriétés de la fonction exponentielle — 2 points

Démontrer, pour tout réel x, l'égalité suivantes :
$$\frac{2-e^{x}}{e^{x}+1}=2-\frac{3}{1+e^{-x}}$$

Tournez la page ...

Question Bonus

Un couple fait un placement au taux annuel de 1.5 % dont les intérêts sont capitalisés tous les ans. Le couple a placé le montant de 10 000 euros à l'ouverture le 1er janvier 2010 puis, tous les ans à chaque 1er janvier, verse 1 500 euros. L'objectif du couple est de constituer un capital de 30 000 euros. On cherche donc maintenant à écrire un algorithme qui renvoie l'indice et la valeur du premier terme de la suite qui dépasse un 30 000. Compléter le programme et déterminer avec la calculatrice l'année durant laquelle le couple aura atteint son objectif.

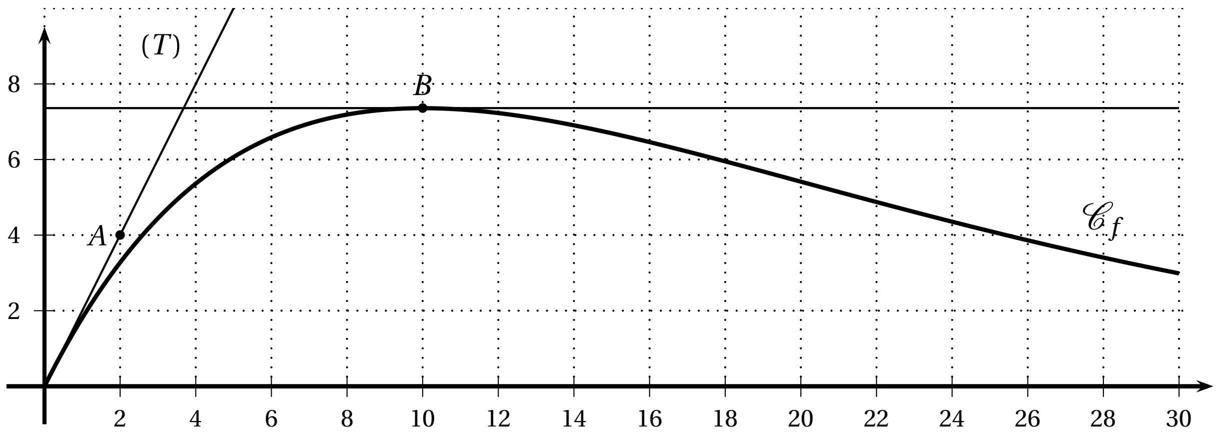
Pseudo Code

```
Fonction recherche(seuil)
    u ← ······
    n ← ······
    Tant que ··········· Faire
        | n ← n+1
        | u ← ······
    Fin Tant que
    Renvoyer (n, u)
```

Réponse : ....

Exercice 3. 14 points

Partie A



Sur la figure ci-dessus, $\mathscr{C}_f$ représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie sur l'intervalle $[0;30]$.
La tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 passe par le point $A(2 ; 4)$.
La tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 10 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(10)$.
2. On suppose désormais que la fonction f est définie sur $[0;30]$ par :

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-0,1x}$$

On note f' sa fonction dérivée.

2. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;30]$ on a :

$$f'(x) = 0,2\mathrm{e}^{-0,1x} \times (10 - x)$$

2. b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0;30]$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f.

3.

3. a. Justifier que l'équation $f(x) = 5$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0;10]$. On la notera α.

3. b. Déterminer un encadrement de α au centième.

Dans la suite, on admet que l'équation $f(x) = 5$ possède une unique solution dans l'intervalle $[10;30]$.
On note β cette solution. On admet que $21,53 < \beta < 21,54$.

4. On admet que la fonction dérivée seconde de f, notée f'', est définie pour tout x de $[0;30]$ par :

$$f''(x) = \frac{1}{50}\mathrm{e}^{-0,1x} \times (x - 20)$$

4. a. Étudier la convexité de f sur $[0;30]$.

4. b. Que peut-on en déduire pour le point d'abscisse 20 de la courbe $\mathscr{C}_f$? Justifier.

Partie B

Une entreprise fabrique de manière artisanale des jouets en bois. Les bénéfices de la production sont modélisés par la fonction f, où x est le nombre de centaines de jouets et $f(x)$ le bénéfice exprimé en milliers d'euros.

1. Quel est le nombre de jouets qu'il faut produire pour que le bénéfice soit maximal? Indiquer la valeur de ce bénéfice maximal à l'euro près.
2. Combien l'entreprise doit-elle produire de jouets pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 5 000 euros?

Fin du devoir