Math93.com

Devoir Surveillé n°7A Correction

TES

Probabilités et Échantillonnage

Durée 1 heure - Coeff. 5

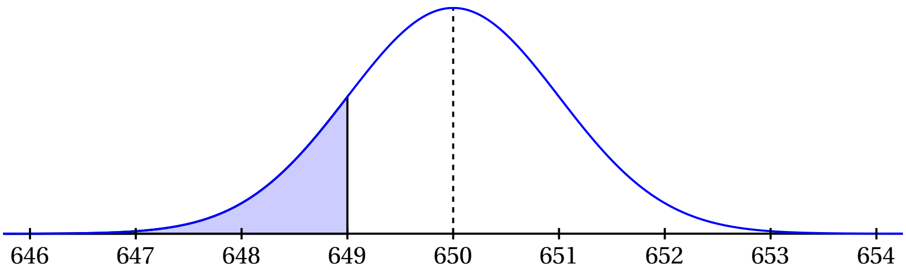
Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. QCM — 3 points

Question 1 (Réponse B)

Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe représentative de la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale et telle que $P(X \leqslant 649) \approx 0{,}1587$. On note respectivement μ et σ l'espérance et l'écart-type de cette loi normale.



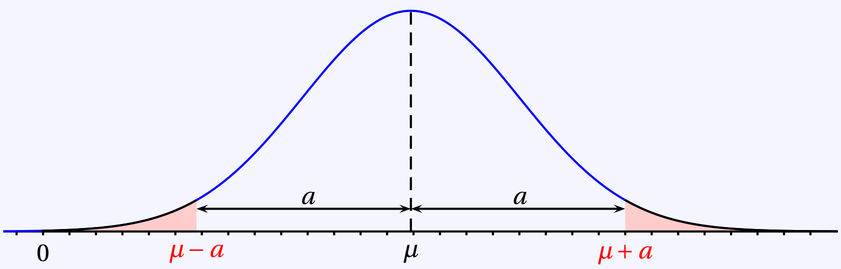
A. $P(X \leqslant 651) \approx 0{,}6587$	**B.** $\boxed{P(649 \leqslant X \leqslant 651) \approx 0{,}683}$
C. $\sigma = 650$	**D.** $\mu = 649$

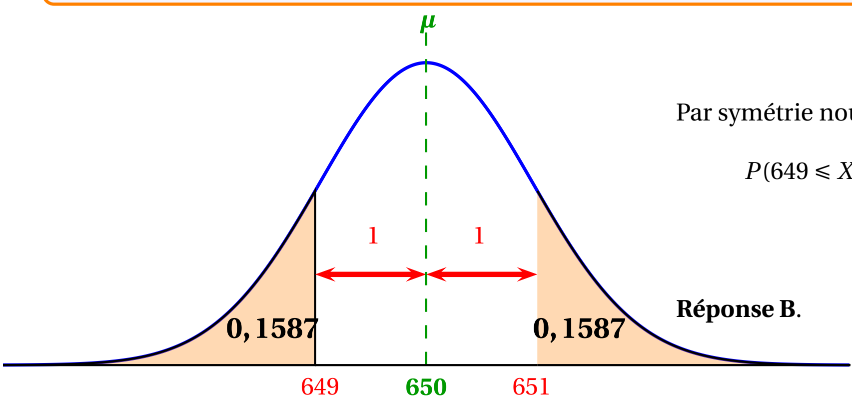
Preuve.

Propriété 1

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$.
Alors par symétrie on a

$$P\left(X \geq \mu + a\right) = P\left(X \leq \mu - a\right)$$





Par symétrie nous avons donc :

$$\begin{aligned} P(649 \leqslant X \leqslant 651) &= 1 - \left(P(X \leqslant 649) + P(X \geqslant 651)\right) \\ &\approx 1 - 2 \times 0,1587 \approx 0,6826 \\ &\approx \underline{0,683} \end{aligned}$$

Réponse B.

$$P\left(X \leq 649\right) = 0,1587 = P\left(X \geq 651\right)$$

Question 2 (Réponse B)

Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[14\,;\,16]$. $P(X \leqslant 15,5)$ est égal à :

A. 0,97

$\boxed{\textbf{B. } 0{,}75}$

C. 0,5

D. $\dfrac{1}{4}$

Preuve.

$$P(X \leq 15,5) = P(14 \leq X \leq 15,5) = \frac{15,5-14}{16-14} = \frac{1,5}{2} = \underline{0,75}$$

Question 3 (Réponse C)

Pour tout évènement E on note $P(E)$ sa probabilité. X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 30 et d'écart type σ. Alors :

a. $P(X = 30) = 0,5$

b. $P(X < 40) < 0,5$

$\boxed{\textbf{c. } P(X < 20) = P(X > 40)}$

d. $P(X < 20) > P(X < 30)$

Preuve.
La seule solution possible est : c.) $P(X < 20) = P(X > 40)$ car par symétrie :

$$P(X < \mu - a) = P(X > \mu + a) \iff P(X < 30 - 10) = P(X > 30 + 10)$$

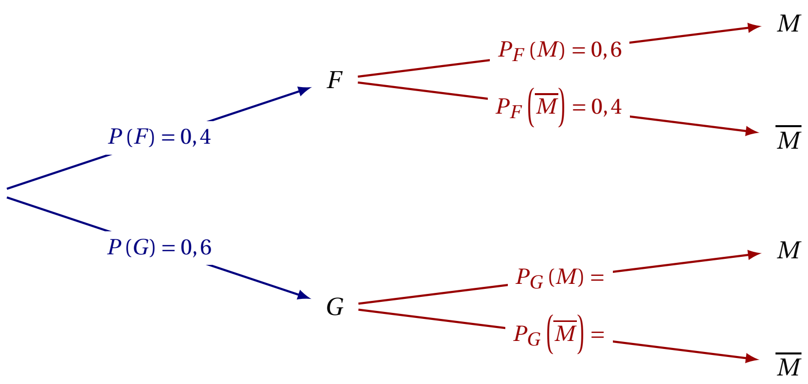
Exercice 2. Probabilités 12.5 points

Des professeurs d'éducation physique et sportive proposent à leurs élèves de terminale un cycle de demi-fond qui consiste à courir 3 fois 500 mètres. Le temps cumulé obtenu à l'issue d'un cycle définit une note de performance notée sur 14 points.Le barème est différent entre les garçons et les filles. 4 classes sont regroupées et 40 % des élèves sont des filles. 60 % des filles obtiennent une note de performance supérieure ou égale à 7 sur 14.

Partie A

On choisit un élève au hasard parmi les 120 élèves. F l'évènement : « L'élève est une fille » ; G l'évènement : « L'élève est un garçon » ; M l'évènement : « La note de performance est supérieure ou égale à 7 sur 14 ». Pour tout évènement E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E et $P(E)$ sa probabilité. Pour tout évènement F de probabilité non nulle, on note $P_F(E)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.

1. Construire un arbre de probabilités correspondant à cette situation .



2. **Déterminer $P(F \cap M)$.**

$$P(F \cap M) = P(F) \times P_F(M) = 0,40 \times 0,60 = \underline{0,24}$$

3. **On donne $P(M) = 0,64$, déterminer $P(G \cap M)$ puis en déduire $P_G(M)$, arrondie au millième.**
D'après la formule des probabilités totales, les évènements F et G formant une partition de l'univers :

$$P(M) = P(F \cap M) + P(G \cap M)$$
$$P(G \cap M) = P(M) - P(F \cap M)$$
$$P(G \cap M) = 0,64 - 0,24 = 0,4$$

On a donc

$$P_G(M) = \frac{P(G \cap M)}{P(G)} = \frac{0,4}{0,6} \approx \underline{0,667}$$

4. **Sachant qu'une personne interrogée a obtenu une note de performance supérieure ou égale à 7 points sur 14, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?**
Sachant qu'une personne interrogée a obtenu une note de performance supérieure ou égale à 7 points sur 14, la probabilité que ce soit une fille est

$$P_M(F) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{0,24}{0,64} = \underline{0,375}$$

Partie B

On considère un groupe de 70 filles d'un autre établissement. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de filles de ce groupe ayant une note de performance supérieure ou égale à 7 sur 14. Les notes obtenues sont indépendantes les unes des autres. On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 70$ et $p = 0,6$.

1. **Calculer la probabilité arrondie au dix-millième qu'exactement 30 filles obtiennent une note de performance supérieure ou égale à 7.**
   Puisque X suit une loi Binomiale de paramètre $n = 70$ et $p = 0,6$ on a :
   $$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{70}{k} \times 0,6^k \times (0,4)^{70-k}$$
   Et donc
   $$p(X=30) = \binom{70}{30} \times 0,6^{30} \times 0,4^{40}$$
   Soit :
   $$\boxed{p(X=30) \approx 0.0015}$$

   > *Calculatrices*
   > - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.binomDdP* (70 , 0,6 , 30) ≈ 0,0015
   > - *Sur TI82/83+ : Menu Distrib ⇒ binomFdp* (70 , 0,6 , 30) ≈ 0,0015
   > - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu Opt/STAT/DIST/DINM ⇒ binomialPD* (30 , 70 , 0,6) ≈ 0,0015

2. **Calculer la probabilité arrondie au dix-millième qu'au moins 30 filles obtiennent une note de performance supérieure ou égale à 7.**
   La probabilité qu'au moins 30 filles obtiennent une note de performance supérieure ou égale à 7 est $P(X \geq 30)$.
   Or on a $P(X \geq 30) = 1 - P(X \leq 29)$ donc la calculatrice donne :
   $$P(X \geq 30) = 1 - P(X \leq 29) \approx \underline{0.9987}$$

   > *Calculatrices*
   > - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.binomFdR* (70 , 0,6 , 29) ≈ 0,416
   > - *Sur TI82/83+ : Menu Distrib ⇒ binomFrép* (70 , 0,6 , 29) ≈ 0,416
   > - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu Opt/STAT/DIST/DINM ⇒ binomialCD* (29 , 70 , 0,6) ≈ 0,416

3. **Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**
   D'après le cours :
   $$E(X) = np = 70 \times 0,6 = 42$$
   Donc en moyenne, <u>42 filles auront une performance supérieure ou égale à 7</u>.

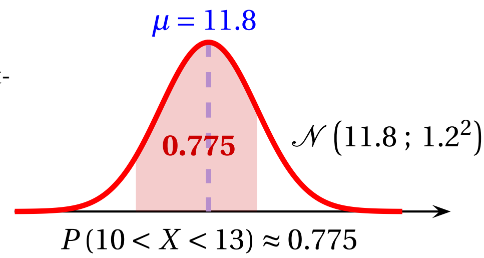
Partie C

Cette épreuve permet de développer sa VMA (vitesse maximale aérobie) qui correspond à une vitesse de course rapide. L'unité de mesure de la VMA est le km/h. On choisit un élève au hasard parmi les 120 élèves. On admet que la VMA d'un élève pris au hasard est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 11{,}8$ et d'écart type $\sigma = 1{,}2$.

1. **Quelle est la probabilité arrondie à 10^{-3}, qu'un élève de terminale de ce lycée ait une VMA comprise entre 10 et 13 km/h ?**

   La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 11.8$ et d'écart-type $\sigma = 1.2$. La calculatrice nous donne à 10^{-3} près :

   $$X \sim \mathcal{N}\left(11.8\,;\,1.2^2\right) \Longrightarrow P(10 < X < 13) \approx \underline{0{,}775}$$



   > *Calculatrices*
   >
   > - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*$(10\,,\,13\,,\,11.8\,,\,1.2) \approx \underline{0{,}774\,537\,545}$
   > - *Sur TI82/83+ : normalcdf*$(10\,,\,13\,,\,11.8\,,\,1.2)$ *ou (fr.) normalfrép*$(10\,,\,13\,,\,11.8\,,\,1.2)$
   > - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* $\Rightarrow$ *NormCD*$(10\,,\,13,\,1.2\,,\,11.8\,)$

2. **Quelle est la probabilité arrondie à 10^{-3}, qu'un élève de terminale de ce lycée ait une VMA inférieure ou égale à 12 km/h ?**

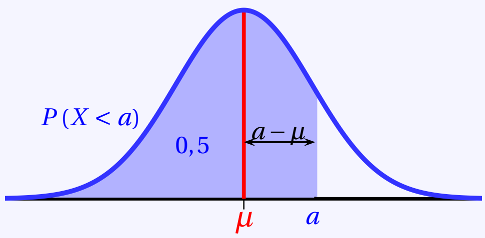
   Propriété 2 $(P(X < a)\ ;\ a > \mu)$

   Si la variable X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

   $$P\left(X < \mu\right) = 0{,}5 = P\left(X > \mu\right)$$

   De plus pour tout rée a avec $a > \mu$:

   $$\boxed{P(X < a) = 0{,}5 + P\left(\mu < X < a\right)}$$



   Donc ici la probabilité cherchée est :

   $$P(X \leq 12) = 0{,}5 + P(11{,}8 \leq X \leq 12) \approx \underline{0{,}566}$$

3. **Sachant que l'élève a une VMA inférieure ou égale à 12 km/h, quelle est la probabilité arrondie à 10^{-3} qu'il ait une VMA supérieure à 10 km/h ?**

   $$P_{X\leq 12}(X \geq 10) = \frac{P\Big(\left(X \geq 10\,\right) \cap \left(X \leq 12\,\right)\Big)}{P(X \leq 12)} = \frac{P(10 \leq X \leq 12)}{P(X \leq 12)} \approx \frac{0{,}499376631}{0{,}566} \approx \underline{0.882}$$

4. **Déterminer la valeur arrondie au dixième de α tel que $P(Y \leqslant \alpha) = 0{,}8$. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.**

   On cherche α tel que $P(X \leq \alpha) = 0{,}8$ où X qui suit une loi normale $\mathcal{N}\left(11.8\,;\,1.2^2\right)$. La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à 10^{-1} près :

   $$\boxed{P(X \leq \alpha) = 0{,}8 \Longleftrightarrow \alpha \approx \underline{12{,}8}}$$

   > *Calculatrices*
   >
   > - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0.8\,,\,11.8\,,\,1.2) \approx \underline{12{,}809\,945\,482}$
   > - *Sur TI82/83+ : invNorm*$(0.8\,,\,11.8\,,\,1.2)$ *ou (fr.) FracNormale*$(0.8\,,\,11.8\,,\,1.2)$
   > - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN* $\Rightarrow$ *InvNormCD*$(0.8\,,\,1.2\,,\,11.8)$

   On peut interpréter ce résultat en disant que <u>le pourcentage d'élèves ayant une VMA inférieure ou égale à 12,8 km/h est de 80 %</u>.

Exercice 3. Sport+ 2.5 points

L'entreprise « Sport+ » sponsorise plusieurs catégories de sportifs. Ces derniers doivent afficher le slogan :

« Avec Sport+, j'ai 97% de chance d'être sur le podium ! ».

L'étude des résultats sportifs de l'année a révélé que, parmi 280 sportifs de chez « Sport+ », 263 sont montés sur le podium. Que penser du slogan ?

- **Analyse des données** :
  - « Sur un échantillon de $n = 280$ sportifs. Il est constaté que 263 d'entre eux sont montés sur le podium. ». Donc la fréquence observée sportifs montés sur le podium est
  $$f = 263 \div 280 \approx 0{,}939285714 \quad \text{soit} \quad \underline{f \approx 0{,}939}$$
  - On veut tester l'hypothèse : « la proportion de sportifs montés sur le podium est $\underline{p = 97\%}$ ».

- **Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% de la fréquence F_n d'un caracte dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractre dans la population :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 280$, $p = 97$ %. Vérifions les conditions d'application du théore :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 280 \geq 30 \\ \checkmark & np = 280 \times 0{,}97 = 271{,}6 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 280 \times 0{,}03 = 8{,}4 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0{,}97 - 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}97 \times 0{,}03}}{\sqrt{280}} \; ; \; 0{,}97 + 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}97 \times 0{,}03}}{\sqrt{280}} \right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1{,}96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}95002$. On arrondit la borne inférieure par défaut 10^{-3} prms soit $\underline{0{,}95}$.
- $p + 1{,}96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}98998$. On arrondit la borne supérieure par excms 10^{-3} prms soit $\underline{0{,}99}$.

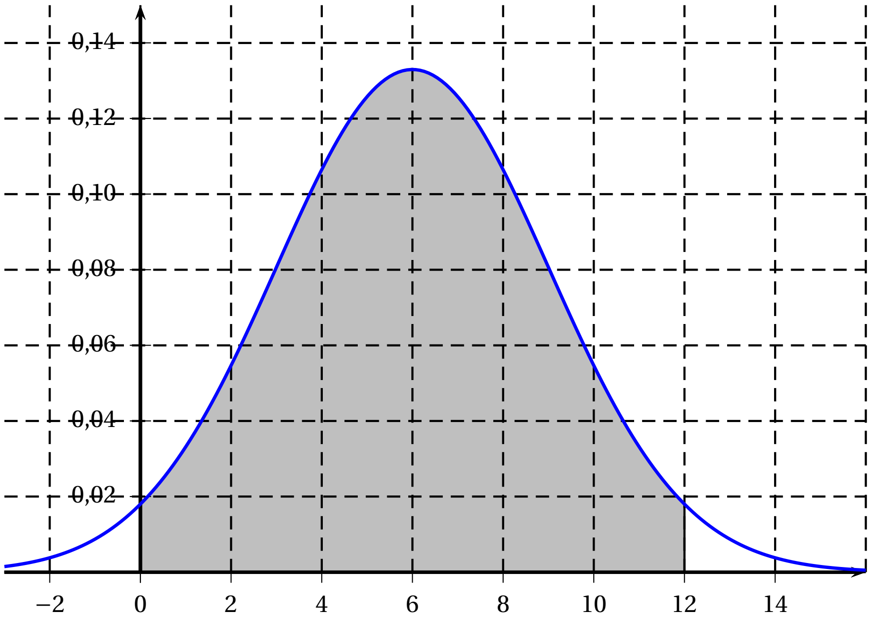
$$\boxed{I_{280} \approx [0{,}95 \; ; \; 0{,}99]}$$

- **Conclusion**
La fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle, $f \approx 0{,}939 \notin I$ donc le résultat du contrôle remet en question l'hypothèse, au seuil de 95%.

Exercice 4. Vrai ou faux 2 points

Dire si l'affirmation est vraie ou fausse et justifier.
Une réponse exacte justifiée rapporte 1 point, une réponse fausse, non justifiée ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne 6.
On donne ci-dessous la courbe qui représente la densité f associée à la variable aléatoire X. La partie grisée vaut $0,95$ unité d'aire.



Affirmation 1

Affirmation 1 : L'écart type de X est égal à 6.

- La variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $m = 6$.
- On sait que :
$$P(0 \leqslant X \leqslant 12) = 0,95$$
soit
$$P(6 - 2 \times 3 \leqslant X \leqslant 6 + 2 \times 3) = 0,95$$
- On applique alors le théorème :

Propriété 3 (Les intervalles « un, deux, trois sigma »)

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

$$P\left(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma\right) \approx 0,683 \quad : (1)$$
$$P\left(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma\right) \approx 0,954 \quad : (2)$$
$$P\left(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma\right) \approx 0,997 \quad : (3)$$

- On sait que $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$ et que $\mu = 6$, donc on peut en déduire que $\sigma \approx 3$.
- Conclusion : Affirmation 2 est fausse.

Fin du devoir