2 Chaîne et cycle eulériens

Définition 3.
- *Une **chaîne**, dans un graphe non orienté, est une suite d'arêtes mises bout à bout reliant deux sommets du graphe.*
- *Une **chaîne orientée**, dans un graphe orienté, est une suite d'arêtes orientées telles que l'extrémité terminale de l'une est l'extrémité initiale de l'autre.*
- *Un **cycle**, dans un graphe, est une chaîne dont les extrémités coïncident, composée d'arêtes toutes distinctes. Une chaîne est notée par la liste des sommets où elle passe, reliés par un segment ou une flèche quand le graphe est orienté.*
- *Un graphe est **connexe** lorsque, pour chaque paire de sommets, il existe au moins une chaîne reliant les deux sommets.*

Exemples. Dans le graphe 1 précédent, (A, D, B, D, C) est une chaîne. Une chaîne orientée du graphe 2 est (B, A, C, A, D). Le graphe 1 n'est pas connexe puisqu'il posseède un sommet isolé.

Définition 4.
- *Une **chaîne eulérienne** est une chaîne composée de toutes les arêtes du graphe, prises une seule fois.*
- *Un **cycle eulérien** est une chaîne eulérienne dont les extrémités coïncident*

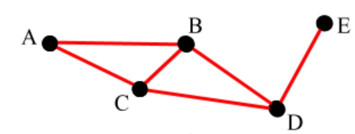
Théorème 2 (Théorèmes d'Euler)**.**
(i) Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne entre les sommets A et B si et seulement si A et B sont les seuls sommets de degré impair.
(ii) Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degré pair.

Exemple. Le graphe 1 admet (B, C, D, B, A, D) pour chaîne eulérienne mais d'admet pas de cycle eulérien.

3 Matrice d'adjacence d'un graphe

Définition 5.
- *La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes qui la composent.*
- *La **distance** entre deux sommets d'un graphe connexe est la longueur de la chaîne qui les relie, ayant le moins d'arêtes.*
- *Le **diamètre** d'un graphe connexe est la plus grande distance constatée entre deux sommets de ce graphe parmi toutes les paires de sommets.*

Exemple.



Graphe 4

Dans le graphe 4, la distance entre A et D est 2. Le diamètre du graphe est 3 (distance entre A et E).

Définition 6. *La **matrice d'adjacence** d'un graphe d'ordre n (resp. graphe orienté d'ordre n) est la matrice carrée A de taille $n \times n$, dont l'élément $a_{i,j}$ est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j. (resp. allant du sommet i vers le sommet j).*

Exemple. Reprenons le graphe 4. Sa matrice d'adjacence est la suivante. Elle est symétrique puisque le graphe n'est pas orienté.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 3. *Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe et soit $p \geq 1$. Alors, l'élément $p_{i,j}$ de la matrice A^p est égal au nombre de chaînes de longueur p reliant le sommet i au sommet j.*