

5 Graphes pondérés

Définition 9.

- Un graphe (orienté ou non) est dit **pondéré** lorsque ses arêtes sont affectées de nombres positifs.
- Le **poids d'une arête** est le nombre positif qui lui est affecté.
- Le **poids d'une chaîne** est la somme des poids des arêtes qui la composent.
- Une **plus petite courte chaîne** entre deux sommets donnés est une chaîne de poids minimal parmi toutes les chaînes reliant les deux sommets.

Algorithme de Dijkstra : algorithme de détermination d'une plus courte chaîne d'un graphe pondéré entre un sommet D et un sommet G .

1. *Etape d'initialisation.*

- On fixe le poids du sommet D à 0.
- On marque provisoirement chaque sommet adjacent à D du poids de l'arête reliant D à ce sommet. Ces sommets sont des **successeurs** de D .
- On marque provisoirement les autres sommets du poids $+\infty$.

2. *Etapas d'itérations.*

On note S l'ensemble des sommets fixés, et \bar{S} l'ensemble des sommets marqués provisoirement.

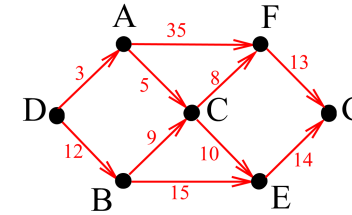
Tant que l'ensemble \bar{S} n'est pas vide, on choisit dans \bar{S} le sommet X dont le poids marqué provisoirement p_X est le plus petit.

- On marque définitivement ce sommet X du poids p_X . On enlève X de \bar{S} et on le place dans S .
- On marque provisoirement chaque sommet Y successeur du sommet X par le poids $p_Y = p_X + p_{X,Y}$ où $p_{X,Y}$ est le poids de l'arête reliant X à Y . Si le poids obtenu p_Y est plus petit que le poids marqué provisoirement au sommet Y , alors on barre ce poids marqué et on marque Y du poids p_Y .
- On réitère le procédé tant que l'ensemble des sommets non fixés n'est pas vide.

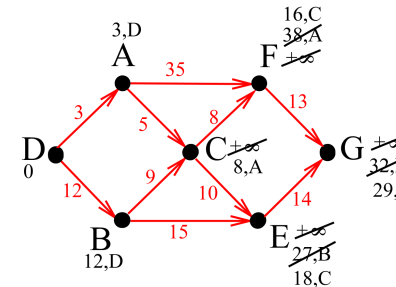
3. *Conclusion.*

On obtient un graphe dont tous les sommets sont fixés. Le poids fixé du sommet G est le poids de la plus courte chaîne du sommet D vers le sommet G dans le graphe.

Exemple : On cherche à déterminer le plus court chemin entre D et G .



Voici le graphe obtenu après l'algorithme. On écrit à côté de chaque sommet le poids (provisoire ou fixé), et le sommet précédent.



On peut présenter également le résultat dans un tableau où chaque ligne représente une étape de l'algorithme.

D	A	B	C	E	F	G
0	3, D	12, D	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	3, D	12, D	8, A	$+\infty$	38, A	$+\infty$
		12, D	8, A	18, C	16, C	$+\infty$
		12, D		18, C	16, C	$+\infty$
				18, C	16, C	29, F
				18, C		29, F
						29, F

La chaîne la plus courte est donc $D - A - C - F - G$