Math93.com

TD n°1 - Terminale ES Spé
Les Graphes

Les exercices identifiés par le symbole (c) sont intégralement corrigés en fin de TD, pour les autres, un lien vers la page du corrigé est proposé sur le site www.math93.com.

Première partie

1. Chaînes et cycles eulériens

Rappels

Définition 1

- Une chaîne, dans un graphe non orienté, est une suite d'arêtes mises bout à bout reliant deux sommets.
- Un graphe est connexe lorsque, pour chaque paire de sommets, il existe au moins une chaîne reliant les deux sommets.
- Une chaîne eulérienne est une chaîne composée de toutes les arêtes du graphe, prises une seule fois.
- Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne dont les extrémités coïncident.

Théorème 1 (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

- Un graphe connexe contient une *chaîne eulérienne* si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
- Un graphe connexe contient un *cycle eulérien* si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair).

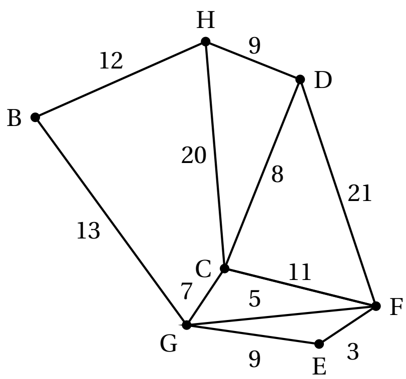
Remarque : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse Leonhard d'Euler (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

Théorème 2 (Conséquence)

Un graphe connexe G admet une chaîne eulérienne distincte d'un cycle si et seulement si le nombre de sommets de G de degré impair est égal à 2.
Dans ce cas, si A et B sont les deux sommets de G de degré impair, alors le graphe G admet une chaîne eulérienne d'extrémités A et B.

Exercice 1. Antilles juin 2016 (c)

Des touristes sont logés dans un hôtel H.
Un guide souhaite faire visiter la région à ces touristes en empruntant les routes signalées comme d'intérêt touristique par l'office du tourisme.
Les tronçons de route qu'il souhaite emprunter sont représentés sur le graphe ci-contre.
Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres des différents tronçons.



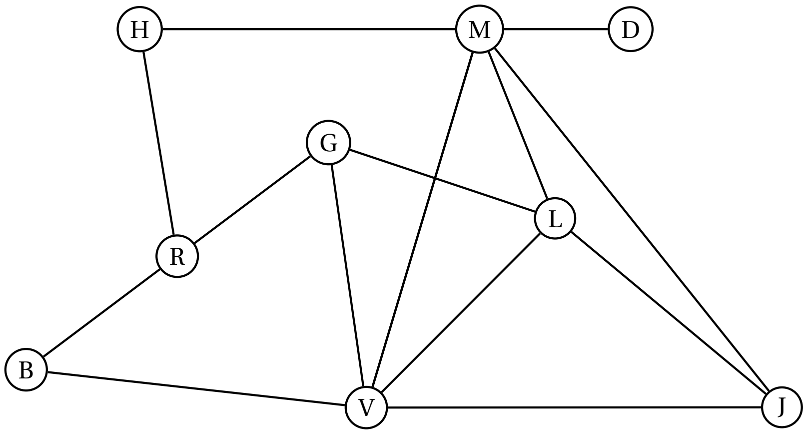
1.

1. a. Le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel et en y revenant ? Justifier la réponse.

1. b. Le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel mais sans forcément y revenir ? Justifier la réponse.

Exercice 2. Amérique du Nord, Juin 2017

Sarah, une jeune étudiante en géologie, souhaite partir en voyage en Islande avec des amis. Elle a loué une voiture tout terrain pour pouvoir visiter les lieux remarquables qu'elle a sélectionnés.
Sarah a construit le graphe ci-dessous dont les sommets représentent les lieux à visiter et les arêtes représentent les routes ou pistes :



B : Le lagon bleu.
D : Chute d'eau de Dettifoss.
G : Geyser de Geysir.
H : Rocher Hvitserkur.
J : Lagune glacière de Jôkulsarlôn.
L : Massif du Landmannalaugar.
M : Lac de Myvatn.
R : Capitale Reykjavik.
V : Ville de Vik.

1. Dans cette question, chaque réponse sera justifiée.

1. a. Déterminer l'ordre du graphe.

1. b. Déterminer si le graphe est connexe.

1. c. Déterminer si le graphe est complet.

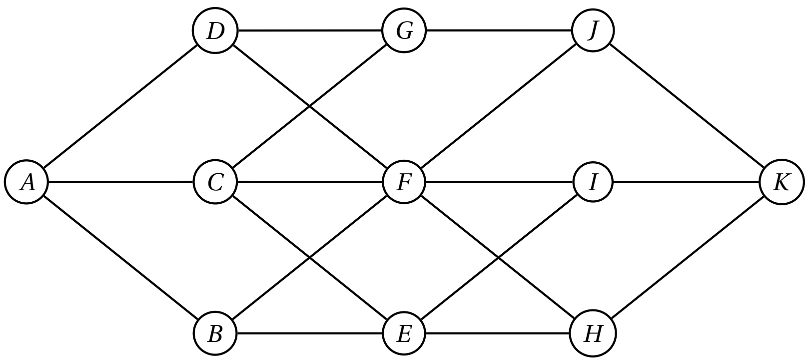
2. Sarah désire emprunter toutes les routes une et une seule fois. Déterminer, en justifiant, si cela est possible.

Réponses

Voir la correction sur www.math93.com

Exercice 3. Asie 2016 - partie 1 (c)

On considère le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous

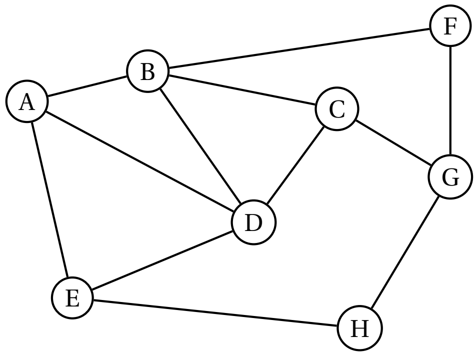


1. En justifiant la réponse, dire si ce graphe admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.

Exercice 4. Centres étrangers 2016 (partie 1)

Une compagnie aérienne utilise huit aéroports que l'on nomme A, B, C, D, E, F, G et H.
Entre certains de ces aéroports, la compagnie propose des vols dans les deux sens.
Cette situation est représentée par le graphe Γ ci-contre, dans lequel :

- les sommets représentent les aéroports,
- les arêtes représentent les liaisons assurées dans les deux sens par la compagnie.



1. 1. a. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est complet.

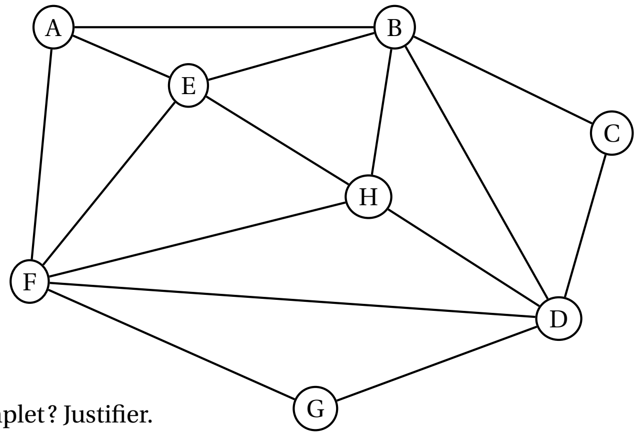
1. b. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est connexe.

2. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.

Réponses
Voir la correction sur www.math93.com

Exercice 5. Asie 2015 (Partie 1)

La coopérative LAFRUITIERE collecte le lait de 7 exploitations de montagne. La situation géographique est représentée par le graphe ci-dessous, noté G_L. La coopérative est située au sommet A, les autres sommets B, C, D, E, F, G et H représentent les différentes exploitations ; les arêtes représentent le réseau routier reliant ces exploitations.



1. 1. a. Le graphe G_L est-il complet ? Justifier.

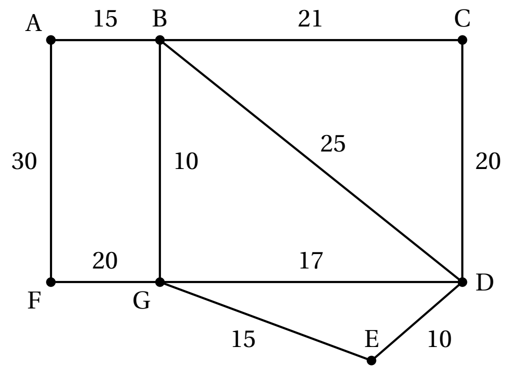
1. b. Le graphe G_L est-il connexe ? Justifier.

2. Est-il possible d'organiser une tournée de toutes les exploitations en partant de A et en terminant en A et en passant au moins une fois par chaque client, tout en empruntant une fois et une seule chaque route ? Justifier la réponse.

Réponses
Voir la correction sur www.math93.com

Exercice 6. Antilles sept 2015 (c) (partie 1)

Un cycliste désire visiter plusieurs villages notés A, B, C, D, E, F et G reliés entre eux par un réseau de pistes cyclables.
Le graphe ci-contre schématise son plan; les arêtes représentent les pistes cyclables et les distances sont en kilomètre.



Partie A
Pour faire son parcours, le cycliste décide qu'il procèdera selon l'algorithme ci-dessous :

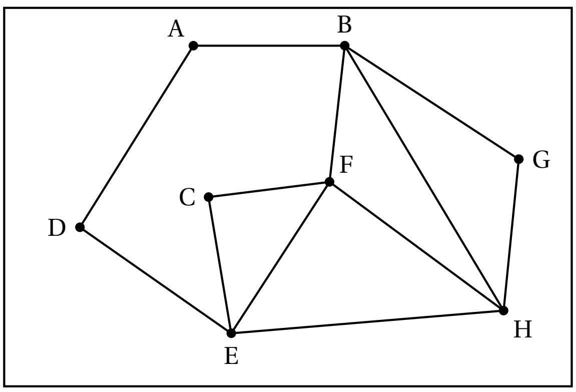
ligne 1	Marquer sur le plan tous les villages comme non « visités »
ligne 2	Choisir un village de départ
ligne 3	Visiter le village et le marquer « visité »
ligne 4	Rouler vers le village le plus proche
ligne 5	Tant que le village où il arrive n'est pas un village déjà visité
ligne 6 ligne 7	|visiter le village et le marquer « visité » |rouler vers le village le plus proche sans revenir en arrière
ligne 8	Fin Tant que
ligne 9	afficher la liste des villages visités

1. Quelle propriété du graphe permet à la ligne 4 d'être toujours exécutable?
2. En partant du village noté G, quelle sera la liste des villages visités?
3. Existe-t-il un village de départ qui permette, en suivant cet algorithme, de visiter tous les villages?
4. Le cycliste abandonne l'idée de suivre l'algorithme. Il souhaite maintenant, partant d'un village, y revenir après avoir emprunté toutes les pistes cyclables une et une seule fois. Cela sera-t-il possible?

Exercice 7. Métropole 2015 (Partie 1)

PARTIE A

On considère le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous :



1. Déterminer en justifiant si ce graphe :

1. a. est connexe;

1. b. admet une chaîne eulérienne.

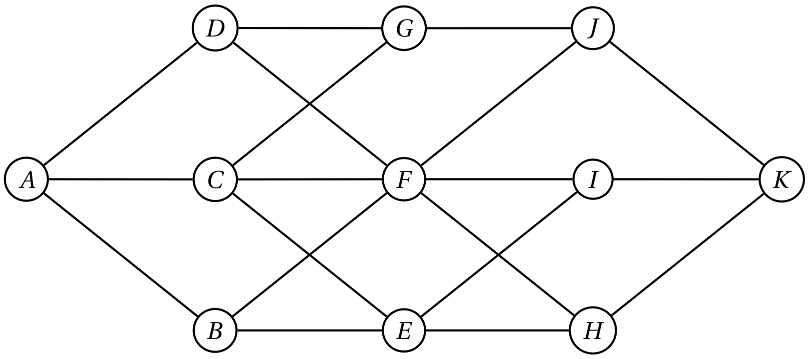
Réponses
Voir la correction sur www.math93.com

Deuxième partie

2. Longueur d'une chaîne et matrice d'un graphe

Exercice 8. Asie 2016 - partie 2 (c)

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous



1. On considère la matrice M ci-après (a, b, c et d sont des nombres réels).

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. a. Déterminer les réels a, b, c et d pour que la matrice M représente la matrice d'adjacence associée au graphe $\mathcal{G}$, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.

1. b. On donne

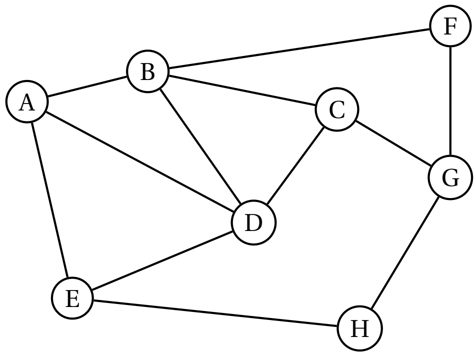
$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 8 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 6 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 11 & 16 & 9 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 8 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & 11 & 7 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 7 & 0 \\ 0 & 13 & 16 & 12 & 0 & 0 & 0 & 13 & 13 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & 8 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 7 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A à J. Préciser ces chemins.

Exercice 9. Centres étrangers 2016 (partie 2)

Une compagnie aérienne utilise huit aéroports que l'on nomme A, B, C, D, E, F, G et H.
Entre certains de ces aéroports, la compagnie propose des vols dans les deux sens.
Cette situation est représentée par le graphe Γ ci-contre, dans lequel :

- les sommets représentent les aéroports,
- les arêtes représentent les liaisons assurées dans les deux sens par la compagnie.



1. Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ en respectant l'ordre alphabétique des sommets du graphe.

2. Pour la suite de l'exercice, on donne les matrices suivantes :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 8 & 8 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 7 & 6 & 7 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 3 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Un voyageur souhaite aller de l'aéroport B à l'aéroport H.

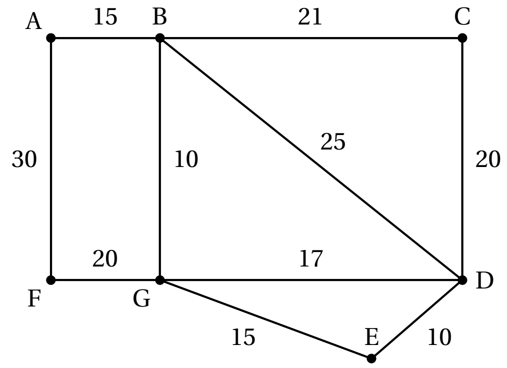
2. a. Déterminer le nombre minimal de vols qu'il doit prendre, Justifier les réponses à l'aide des matrices données ci-dessus.

2. b. Donner tous les trajets possibles empruntant trois vols successifs.

Réponses
Voir la correction sur www.math93.com

Exercice 10. Antilles sept 2015 (c) (partie 2)

Un cycliste désire visiter plusieurs villages notés A, B, C, D, E, F et G reliés entre eux par un réseau de pistes cyclables.
Le graphe ci-contre schématise son plan ; les arêtes représentent les pistes cyclables et les distances sont en kilomètre.



Partie B

1. Écrire la matrice M de transition de ce graphe (dans l'ordre $A, B, C, \dots, G$).
2. On donne la matrice M^4 :

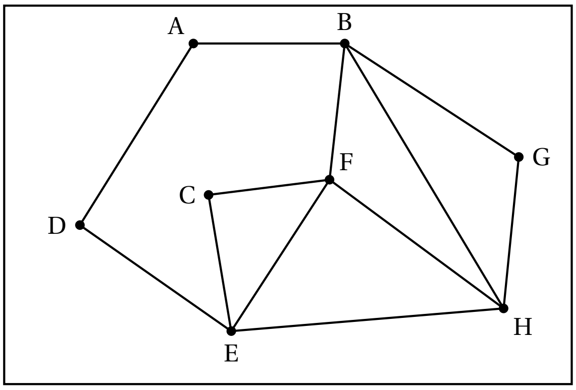
$$M^4 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 5 & 9 & 11 & 4 & 1 & 16 \\ 5 & 30 & 12 & 23 & 18 & 16 & 16 \\ 9 & 12 & 12 & 14 & 9 & 4 & 18 \\ 11 & 23 & 14 & 28 & 14 & 11 & 23 \\ 4 & 18 & 9 & 14 & 12 & 9 & 12 \\ 1 & 16 & 4 & 11 & 9 & 10 & 5 \\ 16 & 16 & 18 & 23 & 12 & 5 & 30 \end{pmatrix} \end{array}$$

Interpréter le terme en gras, ligne A, colonne F (valant 1) dans le contexte de l'exercice.

Exercice 11. Métropole 2015 (Partie 2)

PARTIE A

On considère le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous :



1. Déterminer en justifiant si ce graphe :

1. a. est connexe ;

1. b. admet une chaîne eulérienne.

2. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. On donne :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 5 & 4 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 3 & 8 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 3 & 2 & 9 & 9 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Donner, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à B.

PARTIE B

Un club alpin souhaite proposer à ses membres des randonnées de plusieurs jours dans les Alpes. À cet effet, huit refuges notés A, B, C, D, E, F, G et H ont été sélectionnés.
Le graphe $\mathscr{G}$ de la partie A permet de visualiser les différents itinéraires possibles, les sommets représentant les refuges et les arêtes schématisant tous les sentiers de randonnée balisés les reliant.

1. D'après l'étude effectuée dans la partie A, le club alpin est-il en mesure de proposer :

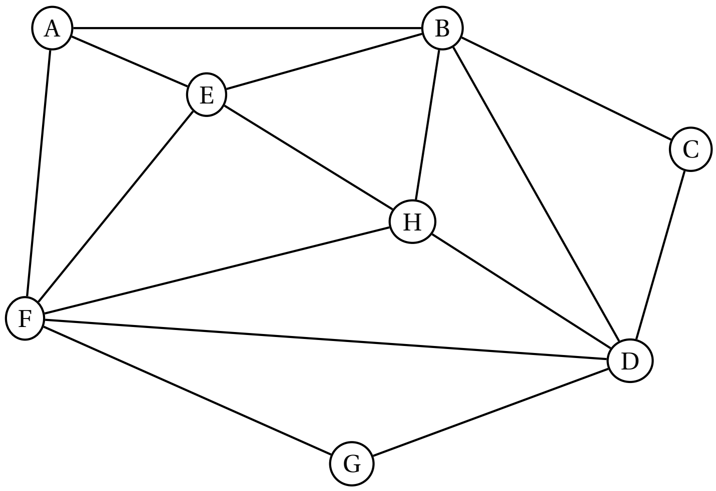
1. a. un itinéraire au départ du refuge A qui passerait par tous les refuges en empruntant une fois et une seule fois chacun des sentiers ? Si oui, proposer un tel itinéraire ;

1. b. des itinéraires de trois jours (un jour correspondant à une liaison entre deux refuges) reliant le refuge E au refuge B ? Si oui, combien peut-il en proposer ?

Réponses
Voir la correction sur www.math93.com

Exercice 12. Asie 2015 (Partie 2)

La coopérative LAFRUITIERE collecte le lait de 7 exploitations de montagne. La situation géographique est représentée par le graphe ci-dessous, noté G_L. La coopérative est située au sommet A, les autres sommets B, C, D, E, F, G et H représentent les différentes exploitations ; les arêtes représentent le réseau routier reliant ces exploitations.



On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe G_L (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).
On donne la matrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 & 7 & 8 & 11 & 3 & 6 \\ 11 & 8 & 7 & 13 & 12 & 8 & 6 & 13 \\ 3 & 7 & 2 & 7 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ 7 & 13 & 7 & 8 & 8 & 13 & 7 & 12 \\ 8 & 12 & 5 & 8 & 8 & 12 & 5 & 11 \\ 11 & 8 & 6 & 13 & 12 & 8 & 7 & 13 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 13 & 4 & 12 & 11 & 13 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A à H.
Indiquer ces chemins.

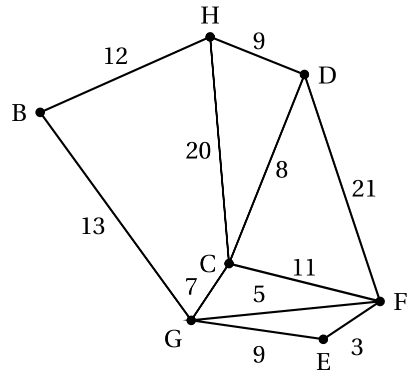
Réponses
Voir la correction sur www.math93.com

Correction

1. Correction : Chaînes et cycles eulériens

Correction de l'exercice 1 : Antilles 2016

Des touristes sont logés dans un hôtel H.
Un guide souhaite faire visiter la région à ces touristes en empruntant les routes signalées comme d'intérêt touristique par l'office du tourisme.
Les tronçons de route qu'il souhaite emprunter sont représentés sur le graphe ci-contre.
Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres des différents tronçons.



1. **1. a.** Rechercher un chemin qui part d'un sommet, qui passe par toutes les arêtes une seule fois et qui revient au sommet de départ, c'est chercher un cycle eulérien dans le graphe.

   D'après le théorème d'EULER, un graphe possède un cycle eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degrés pairs.

   On cherche les degrés des sommets :

Sommets	H	B	C	D	E	F	G
Degrés	3	2	4	3	2	4	4

   Il y a deux sommets de degrés impairs, donc il n'y a pas de cycle eulérien dans ce graphe : le guide ne peut pas emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel et en y revenant.

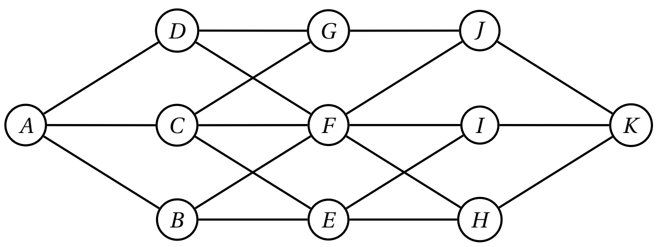
   1. b. Le guide souhaite partir de l'hôtel et parcourir tous les tronçons de route sans forcément revenir à l'hôtel ; il s'agit alors de trouver une chaîne eulérienne dans ce graphe.

   D'après le théorème d'EULER, un graphe contient une chaîne eulérienne si et seulement si exactement zéro ou deux de ses sommets sont de degrés impairs. C'est le cas ici car seuls les sommets H et D sont de degrés impairs ; on peut donc trouver un parcours partant de H et arrivant à D passant une et une seule fois par chaque tronçon de route.

   Voici un tel parcours : HB – BG – GC – CH – HD – DC – CF – FG – GE – EF – FD

Correction de l'exercice 3 : Asie 2016 p1

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous



1. Une chaîne eulérienne contenue dans un graphe est un chemin qui part d'un sommet et qui passe par toutes les arêtes pour arriver à un autre sommet, ou au même (il s'agit alors d'un cycle eulérien).

   D'après le théorème d'EULER, un graphe admet une chaîne eulérienne si et seulement s'il possède exactement zéro ou deux sommets de degrés impairs.

   Déterminons les degrés des sommets de ce graphe :

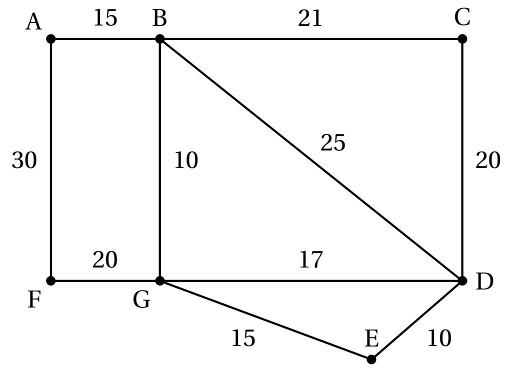
Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Degrés	3	3	4	3	4	6	3	3	3	3	3

   Ce graphe possède plus de deux sommets de degrés impairs, donc il ne contient pas de chaîne eulérienne.

Correction de l'exercice 6 : Antilles Sept 2015

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un cycliste désire visiter plusieurs villages notés A, B, C, D, E, F et G reliés entre eux par un réseau de pistes cyclables.
Le graphe ci-contre schématise son plan; les arêtes représentent les pistes cyclables et les distances sont en kilomètre.



Partie A

Pour faire son parcours, le cycliste décide qu'il procèdera selon l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	Marquer sur le plan tous les villages comme non « visités »
ligne 2	Choisir un village de départ
ligne 3	Visiter le village et le marquer « visité »
ligne 4	Rouler vers le village le plus proche
ligne 5	Tant que le village où il arrive n'est pas un village déjà visité
ligne 6 ligne 7	|visiter le village et le marquer « visité » |rouler vers le village le plus proche sans revenir en arrière
ligne 8	Fin Tant que
ligne 9	afficher la liste des villages visités

1. Le graphe est connexe, donc il y a au moins une arête qui part de n'importe quel sommet, et donc une arête de poids minimum qui part de ce sommet.

2. En partant du village G que l'on visite, on roule vers le village B (distance 10) que l'on visite, puis vers le village A (distance 14), enfin vers le village F (distance 30). De F, on ne peut se rendre que dans un village déjà visité, G ou A, donc G puisqu'on ne revient pas en arrière; comme le village est déjà visité, on sort de la boucle « tant que ».

$$G \xmapsto{10} B \xmapsto{15} A \xmapsto{30} F \xmapsto{20} G$$

3. La question posée revient à chercher si, en suivant cet algorithme, on peut visiter les villages C, D et E avant le village G. La réponse est positive, il suffit de partir du village C :

$$C \xmapsto{20} D \xmapsto{10} E \xmapsto{15} G \xmapsto{10} B \xmapsto{15} A \xmapsto{30} F$$

4. Partir d'un village, y revenir après avoir emprunté toutes les pistes cyclables une et une seule fois, c'est chercher un cycle eulérien ou un chemin eulérien dans ce graphe.

D'après le théorème d'Euler, un graphe connexe admet un chemin eulérien si et seulement s'il possède exactement deux sommets de degrés impairs, et il possède des cycles eulériens si tous les sommets sont de degrés pairs.

sommet	A	B	C	D	E	F	G
degré	2	4	2	4	2	2	4

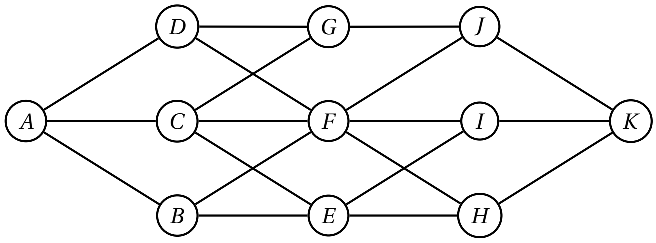
Dans ce graphe, tous les sommets sont de degré pair, donc il existe au moins un cycle eulérien partant de chaque sommet.

Par exemple : AB – BC – CD – DB – BG – GD – DE – EG – GF – FA est un parcours partant de A et revenant à A, qui passe par les 10 pistes cyclables une et une seule fois.

2. Correction : Longueur d'une chaîne et matrice d'un graphe

Correction de l'exercice 8 : Asie 2016 p2

On considère le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous



1. On considère la matrice M ci-après (a, b, c et d sont des nombres réels).

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. a. La matrice d'adjacence du graphe est composée de 0 et de 1. On met un 0 à la ligne i et la colonne j s'il n'existe pas d'arête entre le sommet numéro i et le sommet numéro j. S'il y en a une, on met 1.

La lettre a est située à la ligne 3 et la colonne 4 ; ce sera donc 0 s'il existe une arête entre le sommet 3 (C) et le sommet 4 (D). Il n'y a pas d'arête reliant C à D donc $a = 0$.

La lettre b, située ligne 4 et colonne 7, marque s'il existe une arête entre le sommet 4 (D) et le sommet 7 (G). C'est le cas donc $b = 1$.

La lettre c marquera une arête entre les sommets 9 (I) et 5 (E) ; il y en a une donc $c = 1$.

La lettre d marquera une arête entre les sommets 11 (K) et 5 (E) ; il n'y en a pas donc $d = 0$.

1. b. On donne

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 8 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 6 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 11 & 16 & 9 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 8 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & 11 & 7 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 7 & 0 \\ 0 & 13 & 16 & 12 & 0 & 0 & 0 & 13 & 13 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & 8 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 7 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

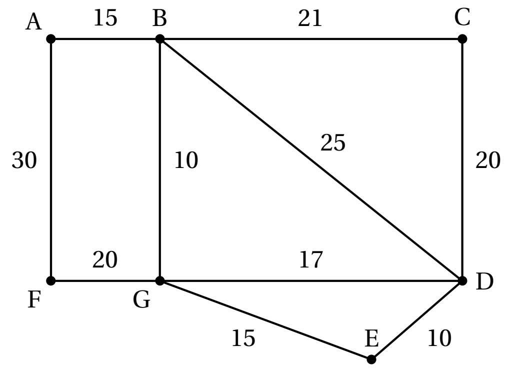
Le sommet A est le numéro 1 ; le sommet J est le numéro 10. Le nombre de chemins de longueur 3 est le nombre situé dans la matrice M^3 à la ligne 1 et la colonne 10. C'est 5 donc il y a 5 chemins de longueur 3 reliant A à J.

Ce sont : $AD - DF - FJ$; $AD - DG - GJ$; $AC - CG - GJ$; $AC - CF - FJ$; $AB - BF - FJ$

Correction de l'exercice 10 : Antilles Sept 2015

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un cycliste désire visiter plusieurs villages notés A, B, C, D, E, F et G reliés entre eux par un réseau de pistes cyclables.
Le graphe ci-contre schématise son plan; les arêtes représentent les pistes cyclables et les distances sont en kilomètre.



Partie B

1. La matrice M de transition de ce graphe est :

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{array}{c} A\\B\\C\\D\\E\\F\\G \end{array} & \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&1&0\\ 1&0&1&1&0&0&1\\ 0&1&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&1&1&1&0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On met un 1 à l'intersection de la ligne i et de la colonne j s'il y a dans le graphe une arête qui relie le sommet de la ligne i au sommet de la colonne j ; sinon on met un 0.

2. On donne la matrice M^4 :

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{array}{c} A\\B\\C\\D\\E\\F\\G \end{array} & \begin{pmatrix} 10&5&9&11&4&\mathbf{1}&16\\ 5&30&12&23&18&16&16\\ 9&12&12&14&9&4&18\\ 11&23&14&28&14&11&23\\ 4&18&9&14&12&9&12\\ 1&16&4&11&9&10&5\\ 16&16&18&23&12&5&30 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le terme en gras, ligne A, colonne F (valant 1), donne le nombre de chemins contenant 4 arêtes (la puissance de la matrice M) reliant le sommet A au sommet F; ce chemin est :

$$AB - BD - DG - GF$$