Math93.com

TD n°3 - Terminale ES Spé
Les Graphes au Bac

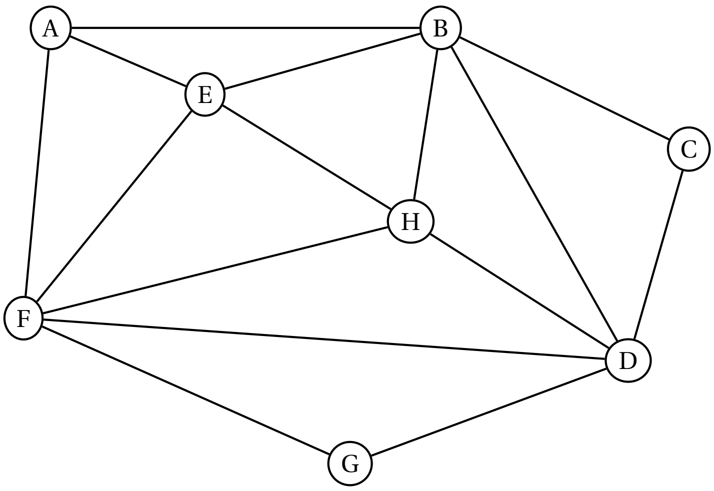
Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD. Les autres présentent des éléments de réponses et un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Partie 1 : Matrice d'adjacence et algorithmes (classique)

Exercice 1. Asie Juin 2015 — 5 points

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

La coopérative LAFRUITIERE collecte le lait de 7 exploitations de montagne. La situation géographique est représentée par le graphe ci-dessous, noté G_L. La coopérative est située au sommet A, les autres sommets B, C, D, E, F, G et H représentent les différentes exploitations ; les arêtes représentent le réseau routier reliant ces exploitations.



Partie A

1. **1. a.** Le graphe G_L est-il complet ? Justifier.

   1. b. Le graphe G_L est-il connexe ? Justifier.

2. Est-il possible d'organiser une tournée de toutes les exploitations en partant de A et en terminant en A et en passant au moins une fois par chaque client, tout en empruntant une fois et une seule chaque route ? Justifier la réponse.

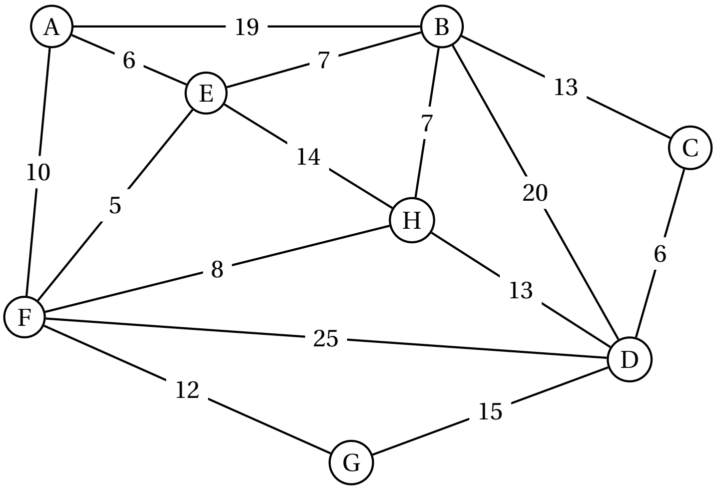
3. On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe G_L (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).
   On donne la matrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 & 7 & 8 & 11 & 3 & 6 \\ 11 & 8 & 7 & 13 & 12 & 8 & 6 & 13 \\ 3 & 7 & 2 & 7 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ 7 & 13 & 7 & 8 & 8 & 13 & 7 & 12 \\ 8 & 12 & 5 & 8 & 8 & 12 & 5 & 11 \\ 11 & 8 & 6 & 13 & 12 & 8 & 7 & 13 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 13 & 4 & 12 & 11 & 13 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

   Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A à H.
   Indiquer ces chemins.

Partie B

Les arêtes sont pondérées par les distances entre les exploitations, exprimées en kilomètres. La coopérative doit collecter du lait provenant de l'exploitation D ; quel est le plus court parcours pour se rendre de A à D ? Justifier.



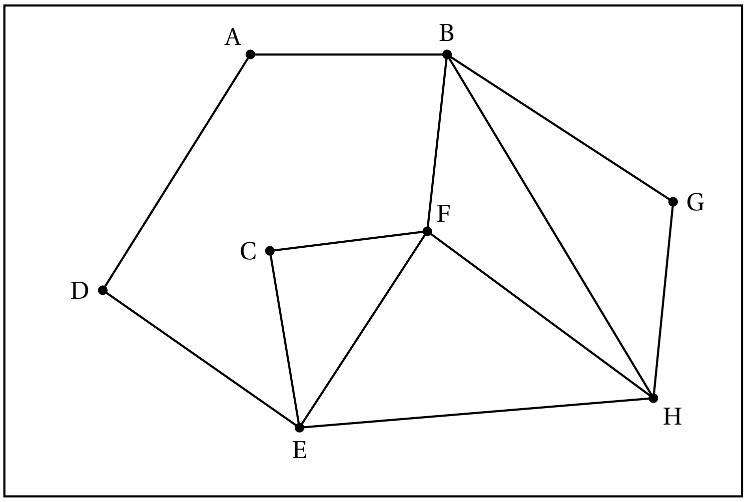
Réponses
(A.3.) 6 chemins - (B.) A – F – H – D, 31 km
Correction détaillée sur www.math93.com

Exercice 2. Métropole Juin 2015 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous :



1. Déterminer en justifiant si ce graphe :
   1. a. est connexe ;
   1. b. admet une chaîne eulérienne.
2. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. On donne :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 5 & 4 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 3 & 8 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 3 & 2 & 9 & 9 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

   Donner, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à B.

Partie B

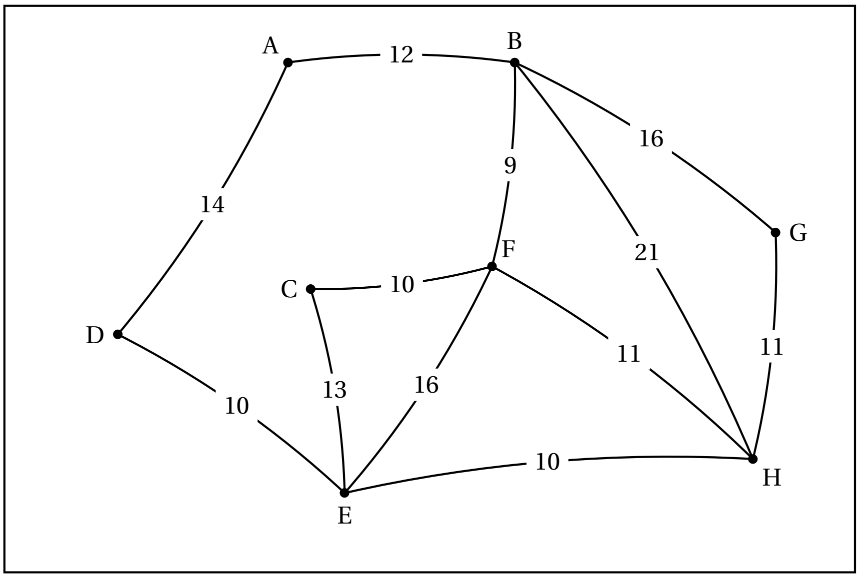
Un club alpin souhaite proposer à ses membres des randonnées de plusieurs jours dans les Alpes. À cet effet, huit refuges notés A, B, C, D, E, F, G et H ont été sélectionnés.
Le graphe $\mathcal{G}$ de la partie A permet de visualiser les différents itinéraires possibles, les sommets représentant les refuges et les arêtes schématisant tous les sentiers de randonnée balisés les reliant.

1. D'après l'étude effectuée dans la partie A, le club alpin est-il en mesure de proposer :

1. a. un itinéraire au départ du refuge A qui passerait par tous les refuges en empruntant une fois et une seule fois chacun des sentiers ? Si oui, proposer un tel itinéraire ;

1. b. des itinéraires de trois jours (un jour correspondant à une liaison entre deux refuges) reliant le refuge E au refuge B ? Si oui, combien peut-il en proposer ?

2. Le graphe $\mathcal{G}$ est complété ci-dessous par la longueur en kilomètres de chacun des sentiers.

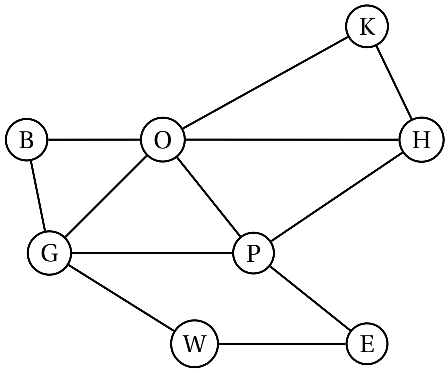


Le club alpin désire aussi proposer à ses membres l'itinéraire le plus court reliant A à H.
Déterminer cet itinéraire et en préciser la longueur en kilomètres.

Réponses
(B.2.) $A \xrightarrow{12} B \xrightarrow{9} F \xrightarrow{11} H$ *de 32 kilomètres .*
Correction détaillée sur www.math93.com

Exercice 3. Centres étrangers 2015 — 5 points

On a schématisé ci-dessous une partie du plan du métro londonien par un graphe Γ dont les sommets sont les stations et les arêtes sont les lignes desservant ces stations.
Chaque station de métro est désignée par son initiale comme indiqué dans la légende.

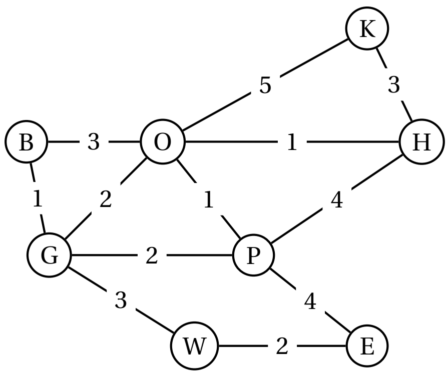


Légende :
B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

1. **1. a.** Déterminer en justifiant si le graphe Γ est connexe.
   1. b. Déterminer en justifiant si le graphe Γ est complet.
2. Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.
3. Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).

Pour la suite de l'exercice, on donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 1 & 4 & 4 & 4 & 9 & 10 & 6 \\ 4 & 1 & 4 & 4 & 5 & 8 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 9 & 8 & 7 & 8 & 10 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & 8 & 3 & 10 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Un touriste se trouve à la station Holborn. Il prévoit de se rendre à la station Green Park en utilisant exactement trois lignes de métro sur son trajet.
   4. a. Sans utiliser le graphe, donner le nombre de trajets possibles et justifier la réponse.
   4. b. Donner les trajets possibles .



Légende :
B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

Sur le graphe pondéré ci-dessus, on a indiqué la durée, exprimée en minutes, des trajets entre chaque station (la durée est indiquée sur chaque arête du graphe Γ).

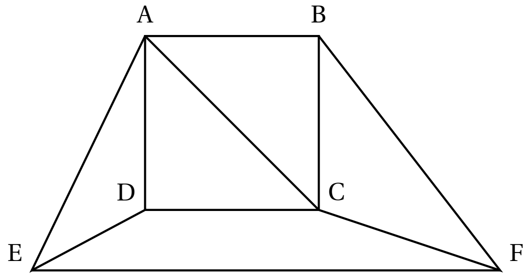
5. À partir de la station Westminster, ce touriste doit rejoindre la station King's Cross St Pancras le plus rapidement possible pour prendre un train. En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet permettant de relier la station Westminster à la station King's Cross St Pancras en une durée minimale. On précisera cette durée.

> **Réponses**
> *(5.)* $W \xrightarrow{3} G \xrightarrow{2} O \xrightarrow{1} H \xrightarrow{3} K$ *en 9 mn .*
> *Correction détaillée sur www.math93.com*

Exercice 4. (c) Polynésie sept 2014 — 5 points

Partie A

Le graphe suivant représente le plan d'une ville. Les arêtes du graphe représentent les principales avenues et les sommets du graphe les carrefours entre ces avenues.



1. Donner l'ordre du graphe puis le degré de chacun des sommets.

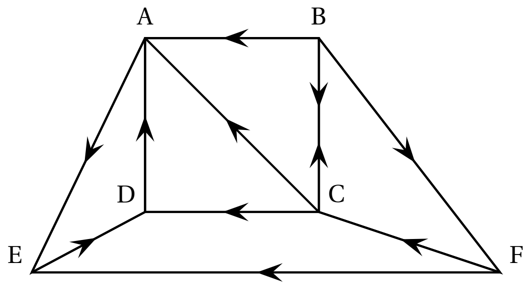
2. Un piéton peut-il parcourir toutes ces avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue :

2. a. en partant d'un carrefour et en revenant à son point de départ ? Justifier la réponse.

2. b. en partant d'un carrefour et en arrivant à un carrefour différent ? Justifier la réponse.

Partie B

Dans le graphe ci-contre, on a indiqué, pour cette même ville, le sens de circulation pour les véhicules sur les différentes avenues.



1. Peut-on trouver un trajet de longueur quelconque qui permet d'aller de D à B en respectant les sens de circulation ? Justifier la réponse.

2. Écrire la matrice M associée à ce graphe (on rangera les sommets dans l'ordre alphabétique).

3. On donne la matrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. a. Que représentent les coefficients de cette matrice ?

3. b. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 partant du carrefour B et arrivant en A ?
Écrire tous ces chemins.

3. c. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 arrivant au point E ? Expliquer la démarche.

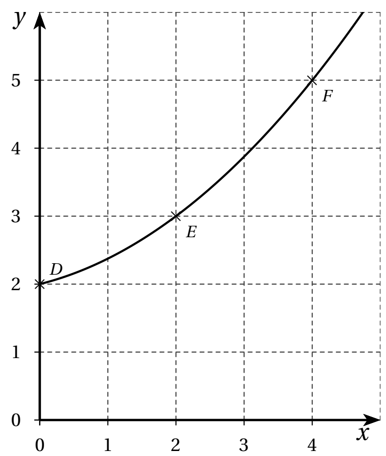
Partie 2 : Avec un système d'équations et quelques originalités

Exercice 5. Amérique du nord 2015 — 5 points

Un créateur d'entreprise a lancé un réseau d'agences de services à domicile. Depuis 2010, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter. Ainsi, l'entreprise qui comptait 200 agences au 1er janvier 2010 est passée à 300 agences au 1er janvier 2012 puis à 500 agences au 1er janvier 2014.
On admet que l'évolution du nombre d'agences peut être modélisée par une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels.
La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et $f(x)$ exprime le nombre d'agences en centaines. la valeur 0 de x correspond donc à l'année 2010.
Sur le dessin ci-dessous, on a représenté graphiquement la fonction f.

Partie A

On cherche à déterminer la valeur des coefficients a, b et c.



1.

1. a. À partir des données de l'énoncé, écrire un système d'équations traduisant cette situation.

1. b. En déduire que le système précédent est équivalent à : $MX = R$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

et R une matrice colonne que l'on précisera.

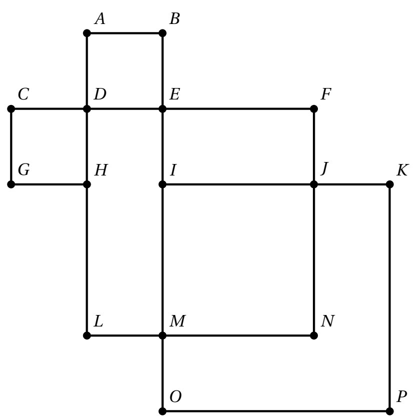
2. On admet que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0,125 & -0,25 & 0,125 \\ -0,75 & 1 & -0,25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

À l'aide de cette matrice, déterminer les valeurs des coefficients a, b et c, en détaillant les calculs.

3. Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1er janvier 2016.

Partie B

Le responsable d'une agence de services à domicile implantée en ville a représenté par le graphe ci-dessous toutes les rues dans lesquelles se trouvent des clients qu'il doit visiter quotidiennement. Dans ce graphe, les arêtes sont les rues et les sommets sont les intersections des rues.



1.

1. a. Déterminer si le graphe est connexe.

1. b. Déterminer si le graphe est complet.

Ce responsable voudrait effectuer un circuit qui passe une et une seule fois par chaque rue dans laquelle se trouvent des clients.

2. Déterminer si ce circuit existe dans les deux cas suivants :

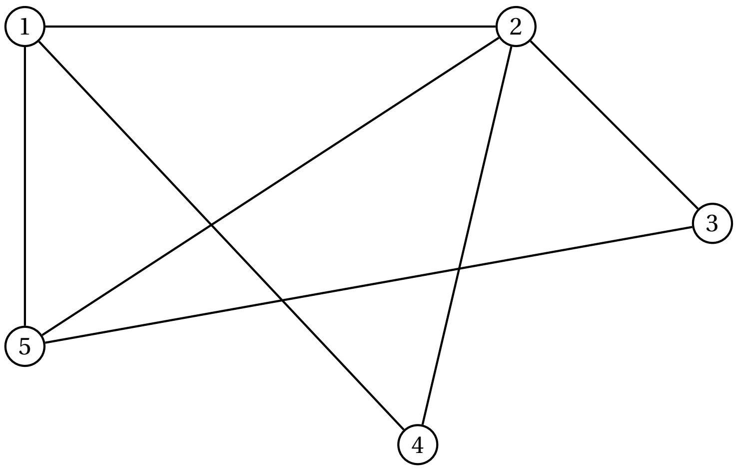
2. a. Le point d'arrivée est le même que le point de départ.

2. b. Le point d'arrivée n'est pas le même que le point de départ.

Réponses
(A.2.) $a = 0,125$; $b = 0,25$; $c = 2$ *(A.3.) 800 agences en 2016*
Correction détaillée sur www.math93.com

Exercice 6. (c) Nouvelle Calédonie nov 2014 — 5 points

Un parc de loisirs propose à ses visiteurs des parcours d'accrobranches.
Les différents parcours sont modélisés par le graphe Γ ci-dessous où les sommets correspondent aux cinq arbres marquant leurs extrémités. Chaque parcours est représenté par une arête du graphe et peut être réalisé dans les deux sens.



1. L'organisateur du parc de loisirs souhaite que les visiteurs puissent, s'ils le souhaitent, réaliser un itinéraire complet d'accrobranches, c'est-à-dire un itinéraire empruntant une fois et une seule chaque parcours et en commençant cet itinéraire par l'arbre numéro 1.

Justifier que ce souhait est réalisable et proposer un tel itinéraire.

2. On note M la matrice associée au graphe Γ en considérant les sommets pris dans l'ordre croissant des numéros d'arbres.

2. a. Écrire la matrice M.

2. b. On donne, ci-dessous, les matrices M^2 et M^3.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

L'organisateur du parc de loisir souhaite organiser des « itinéraires express » qui débuteront à l'arbre numéro 1, emprunteront trois parcours d'accrobranches et finiront à l'arbre 4. Ces itinéraires peuvent éventuellement emprunter plusieurs fois le même parcours.

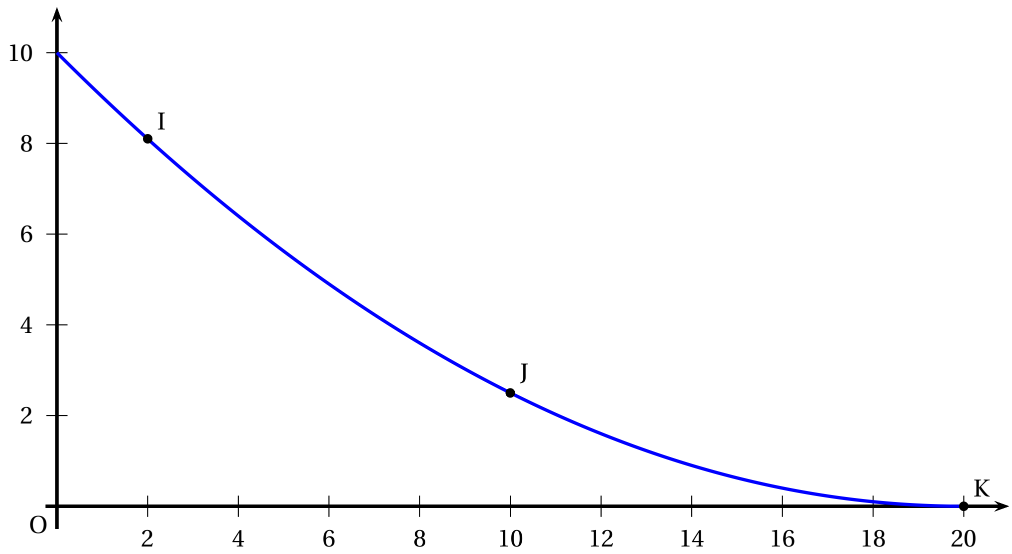
Déterminer, en justifiant votre résultat, le nombre « d'itinéraires express »

réalisables.

(On ne demande pas de donner ces différents itinéraires)

3. Pour terminer ces « itinéraires express », on installe un toboggan géant sur l'arbre 4.

La forme de ce toboggan est modélisée par une fonction f dont la courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.



Cette courbe passe par les points I, J et K de coordonnées respectives (2 ; 8,1), (10 ; 2,5) et (20 ; 0).

La fonction f est définie sur [0 ; 20] par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont trois nombres réels.

3. a. Justifier que a, b et c sont solutions du système : $\begin{cases} 400a + 20b + c & = & 0 \\ 100a + 10b + c & = & 2,5 \\ 4a + 2b + c & = & 8,1 \end{cases}$

3. b. Déterminer les matrices X et V pour que le système précédent soit équivalent à

$$UX = V \quad \text{où} \quad U = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

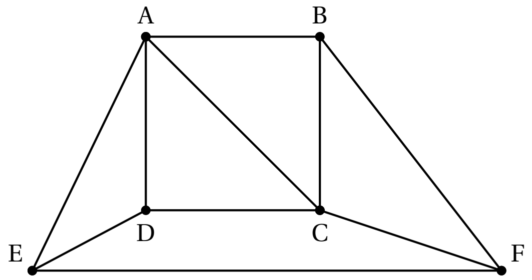
3. c. Déterminer a, b et c.

Corrections

Correction de l'exercice 4 : Polynésie Septembre 2014

Partie A

Le graphe suivant représente le plan d'une ville. Les arêtes du graphe représentent les principales avenues et les sommets du graphe les carrefours entre ces avenues.



1. **Donner l'ordre du graphe puis le degré de chacun des sommets.**
   L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets donc ce graphe est d'ordre 6.

   Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes qui partent de ce sommet :

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	4	3	4	3	3	3

2. **Un piéton peut-il parcourir toutes ces avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue :**

2. a. en partant d'un carrefour et en revenant à son point de départ ? Justifier la réponse.
Partir d'un carrefour, parcourir toutes les avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue et revenir au point de départ, revient à chercher si le graphe admet un cycle eulérien. Citons le théorème d'Euler

Théorème 1 (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

- Un graphe connexe contient une *chaîne eulérienne* si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
- Un graphe connexe contient un *cycle eulérien* si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair).

Remarque : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse Leonhard d'Euler (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

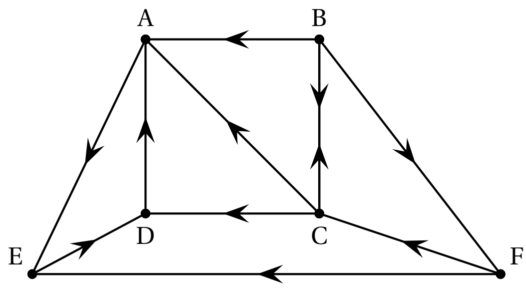
Notons que ce graphe est connexe puisque la chaîne $(A-B-C-D-E-F)$ contient tous les sommets, on peut donc relier toute paire de sommets par une chaîne.
Cependant dans ce graphe, 4 sommets sont de degré impair, donc d'après le théorème d'Euler, ce graphe connexe, n'admet pas de cycle eulérien.

2. b. en partant d'un carrefour et en arrivant à un carrefour différent ? Justifier la réponse.
Partir d'un carrefour, parcourir toutes les avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue et arriver à un autre carrefour que celui du départ, revient à chercher si le graphe admet une chaîne eulérienne.

Or d'après le théorème d'Euler, un graphe connexe admet une chaîne eulérienne différente d'un cycle si et seulement si il a exactement deux sommets de degrés impairs, ce qui n'est pas le cas. Donc il n'existe pas un tel chemin.

Partie B

Dans le graphe ci-dessous, on a indiqué, pour cette même ville, le sens de circulation pour les véhicules sur les différentes avenues.



1. **Peut-on trouver un trajet de longueur quelconque qui permet d'aller de D à B en respectant les sens de circulation ? Justifier la réponse.**
   - Du sommet D, il n'y a qu'un arc qui part vers A donc on ne peut aller que vers A.
   - Du sommet A, il n'y a qu'un arc qui part vers E donc on ne peut aller que vers E.
   - Du sommet E, il n'y a qu'un arc qui part vers D donc on ne peut aller que vers D.
   - On revient donc nécessairement à D, il n'y a donc pas de trajet qui permet d'aller de D à B.

2. **Écrire la matrice *M* associée à ce graphe (on rangera les sommets dans l'ordre alphabétique)**
   La matrice M associée à ce graphe orienté est une matrice carrée d'ordre 6 (le nombre de sommets du graphe) qui ne contient que des 0 et des 1 ; pour i et j deux entiers compris entre 1 et 6, on met 1 à l'intersection de la ligne i et de la colonne j s'il existe un arc reliant le sommet numéro i au sommet numéro j, sinon on met 0. Donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et on donne } M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

3. a. Que représentent les coefficients de cette matrice ?
Le nombre situé à l'intersection de la ligne i $(1 \leq i \leq 6)$ et de la colonne j $(1 \leq j \leq 6)$ de la matrice M^3 donne le nombre de chemins de longueur 3 reliant le sommet numéro i au sommet numéro j.

3. b. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 partant du carrefour B et arrivant en A ? Écrire tous ces chemins.
Le sommet B est le numéro 2, le sommet A est le numéro 1 ; le nombre situé à l'intersection de la ligne 2 et de la colonne 1 de la matrice M^3 est 3 ; il y a donc 3 chemins de longueur 3 partant du carrefour B et arrivant en A.

Ces trois chemins sont :

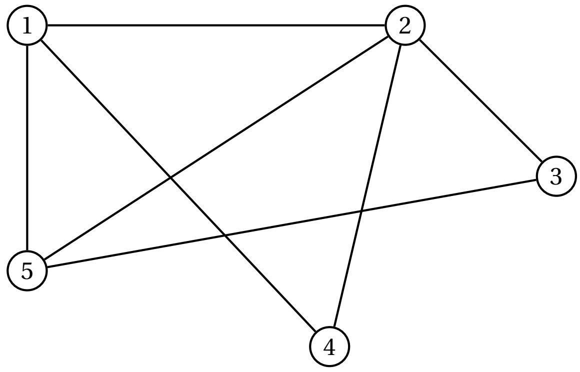
$$B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow A \text{ et } B \longrightarrow F \longrightarrow C \longrightarrow A \text{ et } B \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow A$$

3. c. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 arrivant au point E ? Expliquer la démarche.
Le sommet E est le sommet numéro 5 ; le nombre de chemins arrivant en E sont donc situés dans la colonne 5 de la matrice M^3.

- Nombre de chemins de longueur 3 allant de A vers E : 0
- Nombre de chemins de longueur 3 allant de B vers E : 1
- Nombre de chemins de longueur 3 allant de C vers E : 3
- Nombre de chemins de longueur 3 allant de D vers E : 0
- Nombre de chemins de longueur 3 allant de E vers E : 1
- Nombre de chemins de longueur 3 allant de F vers E : 1

Il y a donc au total $0+1+3+0+1+1 = 6$ chemins de longueur 3 arrivant au point E.

Correction de l'exercice 6 : Nouvelle Calédonie 2014



1. **L'organisateur du parc de loisirs souhaite que les visiteurs puissent, s'ils le souhaitent, réaliser un itinéraire complet d'accrobranches, c'est-à-dire un itinéraire empruntant une fois et une seule chaque parcours et en commençant cet itinéraire par l'arbre numéro 1. Justifier que ce souhait est réalisable et proposer un tel itinéraire.**

Citons le théorème d'Euler

Théorème 2 (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

- Un graphe connexe contient une *chaîne eulérienne* si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
- Un graphe connexe contient un *cycle eulérien* si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair).

Remarque : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse Leonhard d'Euler (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Étudions le degré de chacun des sommets :

sommets	1	2	3	4	5
degré	3	4	2	2	3

Comme il y a exactement deux sommets de degré impair 1 et 5, le théorème d'Euler-Hierholzer affirme qu'il y a une chaine eulérienne qui commence et finit par chacun de ces deux sommets.
Le trajet :

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 1 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 5$$

est un tel itinéraire complet d'accrobranches, empruntant une fois et une seule chaque parcours et commençant par l'arbre numéro 1.

2. **2. a.** La matrice M :

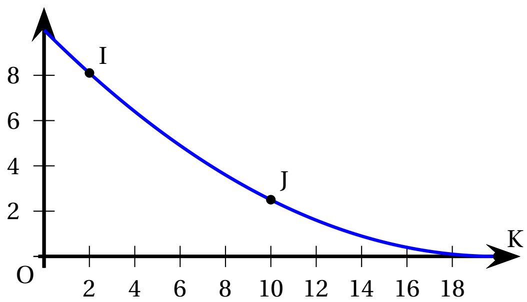
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. b. On utilise la matrice M^3, et son coefficient situé en première ligne quatrième colonne.

Le coefficient (1 ; 4) de la matrice M^3 c'est à dire 5 ; correspond au nombre de chemins de longueur 3 reliant le sommet 1 au sommet 4. C'est le nombre d'« *itinéraires express* » qui débutent à l'arbre numéro 1, empruntent trois parcours d'accrobranches et finissent à l'arbre 4. Ce sont

$$(1-5-2-4)\ ;\ (1-2-1-4)\ ;(1-5-1-4)\ \ ;(1-4-1-4)\ \ ;(1-4-2-4).$$

3. *Pour terminer ces « itinéraires express », on installe un toboggan géant sur l'arbre 4. La forme de ce toboggan est modélisée par une fonction f dont la courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé. Cette courbe passe par les points I, J et K de coordonnées respectives (2 ; 8,1), (10 ; 2,5) et (20 ; 0). La fonction f est définie sur [0 ; 20] par $f(x) = ax^2 + bx + c$.*



3. a. Justifier que $\boldsymbol{a, b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{lcl} \mathbf{400}\boldsymbol{a}+\mathbf{20}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} & = & \mathbf{0} \\ \mathbf{100}\boldsymbol{a}+\mathbf{10}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} & = & \mathbf{2{,}5} \\ \mathbf{4}\boldsymbol{a}+\mathbf{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} & = & \mathbf{8{,}1} \end{array}\right.$

- On sait que $K(20\ ;\ 0)$ est sur la courbe $\mathscr{C}$ donc $f(x_K) = y_K$ donc $f(20) = 0$ or $f(20) = a \times 20^2 + b \times 20 + c$ donc $400a + 20b + c = 0$, c'est la première ligne du système .
- On sait que $J(10\ ;\ 2,5)$ est sur la courbe $\mathscr{C}$ donc $f(x_J) = y_J$ soit $f(10) = 2,5$ avec $f(10) = a \times 10^2 + b \times 10 + c$ donc $100a + 10b + c = 0$, c'est la deuxième ligne du système .
- On sait que $I(2\ ;\ 8,1)$ est sur la courbe $\mathscr{C}$ donc $f(x_I) = y_I$ soit $f(2) = 8,1$ avec $f(2) = a \times 2^2 + b \times 2 + c$ donc $4a + 2b + c = 0$, c'est la troisième ligne du système .

3. b. Déterminer les matrices $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{V}$ pour que le système précédent soit équivalent à : $\boldsymbol{UX = V}$ où $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{400} & \mathbf{20} & \mathbf{1} \\ \mathbf{100} & \mathbf{10} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

Prenons $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 8,1 \end{pmatrix}$ alors le système précédent est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{lcl} 400a+20b+c & = & 0 \\ 100a+10b+c & = & 2,5 \\ 4a+2b+c & = & 8,1 \end{array}\right. \iff UX = Y \quad \text{où} \quad U = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. c. Déterminer $\boldsymbol{a, b}$ et $\boldsymbol{c}$.

La calculatrice nous permet de savoir que U^{-1} existe .
On sait qu'alors :

$$UX = Y \iff X = U^{-1}Y$$

On trouve à la calculatrice que

$$U^{-1}Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{40} \\ \frac{-1}{10} \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\boxed{a = \frac{1}{40}, b = -1 \text{ et } c = 10}$$