Math93.com

TD n°1 - Terminale ES Spé
Les Matrices

Les exercices identifiés par le symbole (c) sont intégralement corrigés en fin de TD, vous pouvez retrouver la correction sur le site www.math93.com.

Exercice 1. Opérations sur les matrices : faire des gammes

On note :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\ ;\ C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\ ;\ D=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\ \text{ et }\ E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

Montrer par le calcul puis vérifier à l'aide de la calculatrice que :

- $B+2\times C=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 2\\ -5 & 3 & -1\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}$.
- $B\times C=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 5 & 0 & -4\\ -3 & -3 & 3\end{pmatrix}$.
- $C\times D=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$.
- $E\times C=\begin{pmatrix}-4 & -1 & -1\end{pmatrix}$.
- $B^2=\begin{pmatrix}4 & -2 & -1\\ -4 & 3 & 3\\ 9 & -5 & 3\end{pmatrix}$.
- $B\times A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & -2\\ 3 & -7\end{pmatrix}$.
- $E\times D=(6)$.

Exercice 2. Calcul de l'inverse (c)

La matrice $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ est elle inversible ?

Aide : Calculer en résolvant un système les réels a, b, c et d tel que $\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Exercice 3. D'après Bac 2016 Polynésie du 10 Juin 2016 (c)

Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.

Affirmation 1

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$. Il existe un réel a pour lequel B est l'inverse de A.

Exercice 4. Puissances et matrice nilpotente (c)

Soit A la matrice

$$A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 3 & 5 & -3\\ 5 & 10 & -6\end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice M telle que $A=M-I_3$.

2. Calculer M^2. En déduire A^2.

Exercice 5. Puissances et inverse

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, en déduire l'inverse de la matrice A.
2. Calculer A^3 et A^4. Quel est l'inverse de la matrice A^2 ?

> **Réponses**
> *1°) $A^2 = -I_2$ donc $A^{-1} = -A$ / 2°) $A^3 = -A$, $A^4 = I_2$, $\left(A^2\right)^{-1} = A^2$.*

Exercice 6. Puissance et inverse

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3.
2. En déduire A^6 puis A^{3n} où n est un entier naturel non nul.
3. Calculer l'inverse de la matrice A^3.
4.
   4. a. Développer le produit $(A - I_3) \times \left(A^2 + AI_3 + I_3{}^2\right)$.
   4. b. En déduire l'inverse de la matrice $B = A - I_3$

Exercice 7. Puissances et diagonalisation

On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1. On note P^{-1} la matrice inverse de la matrice P. Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$
2. Déterminer la matrice D telle que $A = P \times D \times P^{-1}$.
3. Calculer D^2, D^3 et D^4.
4. Calculer A^2, A^3 et A^4.

> **Réponses**
> *2°) $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ / 3°) $D^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ / 4°) $A^4 = \begin{pmatrix} -59 & -90 & -30 \\ 60 & 91 & 30 \\ -30 & -45 & -14 \end{pmatrix}$*

Exercice 8. Matrice et suites

On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Partie A

1. Calculer D^2 et D^3.
2. On note P^{-1} la matrice inverse de la matrice P. Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
3. Soit A la matrice telle que $A = P \times D \times P^{-1}$. Calculer A.
4. Montrer que $A^2 = P \times D^2 \times P^{-1}$ et $A^3 = P \times D^3 \times P^{-1}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+2} = \frac{5}{2}\,u_{n+1} - u_n$.

1. Pour tout entier n, on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

   1. a. Donner V_0 et V_1.

   1. b. Montrer que $V_{n+1} = A \times V_n$.

2. On admet que pour tout entier n, $V_n = A^n \times V_0$ où $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ et $D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

   2. a. Calculer V_6.

   2. b. En déduire les valeurs de u_6 et u_7.

Corrections

Correction de l'exercice 2 : Calcul de l'inverse

La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ est elle inversible ?

Calculons a, b, c et d tel que $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. a, b, c et d sont les solutions éventuelles du système :

$$\begin{cases} 4a-2c=1 \\ 4b-2d=0 \\ -3a+c=0 \\ -3b+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-c=\dfrac{1}{2} \\ -3a+c=0 \\ 2b-d=0 \\ -3b+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=-1 \\ c=-\dfrac{3}{2} \\ d=-2 \end{cases}$$

L'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -1 \\ -\dfrac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 3 : Polynésie - 10 Juin 2016

Affirmation 2 (Vraie)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Il existe un réel a pour lequel B est l'inverse de A.

Preuve.
La matrice B est l'inverse de la matrice A si et seulement sir $AB = Id = BA$. On a prouvé en cours que une seule égalité suffit de ce fait :

$$AB = Id \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a^2=1 \end{cases} \Longleftrightarrow a=-1$$

Il existe un réel $a=-1$ pour lequel B est l'inverse de A. L'affirmation E est vraie.

Correction de l'exercice 4 : Puissance et matrice nilpotente

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

1. **Déterminer la matrice M telle que $A = M - I_3$.**

$$\boxed{M = A + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 5 & 10 & -5 \end{pmatrix}}$$

2. **Calculer M^2. En déduire A^2.**

$$\boxed{M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$A^2 = (M-I_3)^2 = M^2 - 2M + I_3^2 = -2M + I_3$$

Donc

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -6 & -11 & 6 \\ -10 & -20 & 11 \end{pmatrix}}$$