



Math93.com

TD n°2 - Terminale ES Spé

Les Matrices au Bac

Les exercices identifiés par le symbole (c) sont intégralement corrigés en fin de TD, vous pouvez retrouver la correction sur le site www.math93.com.

Exercice 1. Polynésie, Juin 2017

Alex a téléchargé sur son smartphone un jeu lui permettant de combattre des animaux virtuels par localisation GPS. Alex retrouve d'autres personnes, ayant le même jeu, dans le parc de la ville dans le but de comparer le nombre de créatures qu'ils ont combattues.

Le premier jour, 8 personnes se sont retrouvées dans le parc. Le second jour, on comptait 25 personnes et le troisième jour, 80 personnes se sont retrouvées dans le parc.

Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont trois nombres réels et x un nombre entier compris entre 1 et 10. On admet que la fonction f modélise le nombre de personnes qui se retrouvent dans le parc le x -ième jour.

- Traduire l'énoncé par un système de trois équations à trois inconnues a , b et c .
- Vérifier que ce système est équivalent à l'équation $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}$$

- Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. a. Calculer $M \times A$.

3. b. Que représente la matrice M pour la matrice A ?

4. À l'aide d'un calcul matricielle, déterminer les valeurs des nombres a , b et c ?

5. Le parc de la ville a une capacité d'accueil de 2 500 personnes.

Selon ce modèle, le parc risque-t-il de refuser d'accueillir des personnes un de ces dix jours?

Justifier la réponse.

Réponses

La correction détaillée sur www.math93.com

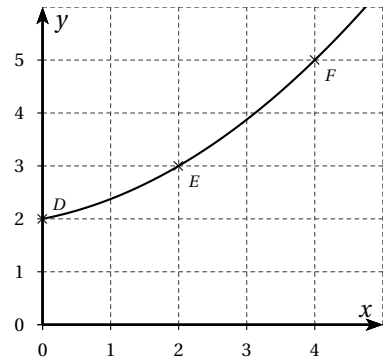
Exercice 2. D'après Bac 2015 Amérique du Nord du 2 Juin 2015 (c)

Cet exercice est la partie A de l'exercice de spécialité maths de l'épreuve d'Amérique du Nord du 2 Juin 2015.

Un créateur d'entreprise a lancé un réseau d'agences de services à domicile. Depuis 2010, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter. Ainsi, l'entreprise qui comptait 200 agences au 1^{er} janvier 2010 est passée à 300 agences au 1^{er} janvier 2012 puis à 500 agences au 1^{er} janvier 2014.

On admet que l'évolution du nombre d'agences peut être modélisée par une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont trois nombres réels.

La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et $f(x)$ exprime le nombre d'agences en centaines. la valeur 0 de x correspond donc à l'année 2010. Sur le dessin, on a représenté graphiquement la fonction f .



On cherche à déterminer la valeur des coefficients a , b et c .

1.

1. a. À partir des données de l'énoncé, écrire un système d'équations traduisant cette situation.

1. b. En déduire que le système précédent est équivalent à : $MX = R$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et R une matrice colonne que l'on précisera.

2. On admet que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0,125 & -0,25 & 0,125 \\ -0,75 & 1 & -0,25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

À l'aide de cette matrice, déterminer les valeurs des coefficients a , b et c , en détaillant les calculs.

3. Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1^{er} janvier 2016.

Exercice 3. D'après Bac 2015 Polynésie du 12 Juin 2015 (c)

Un constructeur de planches de surf fabrique 3 modèles. La conception de chaque modèle nécessite le passage par 3 postes de travail.

- Le **tableau 1** indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les planches ;
- Le **tableau 2** indique le coût horaire par poste de travail.

Tableau 1	Poste 1	Poste 2	Poste 3		Tableau 2	
Modèle 1	8 h	10 h	14 h		Poste 1	25 €/h
Modèle 2	6 h	6 h	10 h		Poste 2	20 €/h
Modèle 3	12 h	10 h	18 h		Poste 3	15 €/h

1. Soit H et C les deux : matrices suivantes : $H = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

1. a. Donner la matrice produit $P = H \times C$.

1. b. Que représentent les coefficients de la matrice $P = H \times C$?

2. Après une étude de marché, le fabricant souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants :

Modèle 1 : 500 € ; Modèle 2 : 350 € ; Modèle 3 : 650 €

Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés a , b et c , permettant d'obtenir ces prix de revient.

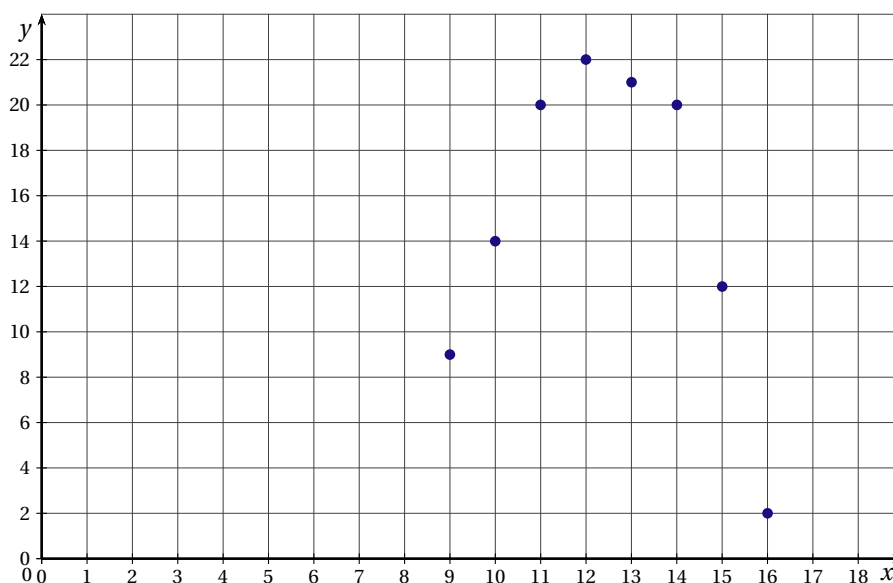
2. a. Montrer que les réels a , b et c doivent être solutions du système :

$$H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$$

2. b. Déterminer les réels a , b et c .

Exercice 4. métropole septembre 2016

Afin d'améliorer la qualité de ses services, une étude statistique a relevé la durée moyenne d'attente en minutes à la billetterie du parc en fonction de l'heure. Ce relevé a eu lieu chaque heure de 9 h à 16 h. On obtient le relevé suivant :



Ainsi, à 10 h, il y avait 14 minutes d'attente à la billetterie.

On souhaite modéliser cette durée d'attente par une fonction qui à l'heure associe la durée d'attente en minutes. Ainsi, il sera possible d'avoir une estimation de la durée d'attente.

On choisit de modéliser cette situation à l'aide de la fonction f définie par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec a , b , c des réels et a non nul telle que les trois points (9 ; 9), (11 ; 20) et (16 ; 2) appartiennent à la représentation graphique de f .

1. Calculer les trois réels a , b et c .
2. En utilisant ce modèle, déterminer sur quelle(s) plage(s) horaire(s) l'attente peut être inférieure à dix minutes.

Exercice 5. Polynésie juin 2013

Alors qu'une entreprise A possédait le monopole de l'accès à internet des particuliers, une entreprise concurrente B est autorisée à s'implanter.

Lors de l'ouverture au public en 2010 des services du fournisseur d'accès B, l'entreprise A possède 90 % du marché et l'entreprise B possède le reste du marché.

Dans cet exercice, on suppose que chaque internaute est client d'une seule entreprise A ou B.

Lors d'une campagne de marketing l'entreprise B distribue un stylo ou un porte-clés; il en coûte à l'entreprise 0,80 € par stylo et 1,20 € par porte-clés distribué.

À la fin de la journée l'entreprise a distribué 550 objets et cela lui a coûté 540 €.

On cherche le nombre s de stylos et le nombre c de porte-clés distribués.

1. Écrire un système traduisant cette situation.
2. Montrer que le système précédent est équivalent à $R \times X = T$ où $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix}$ et X et T sont des matrices que l'on précisera.
3. Résoudre le système à l'aide de la calculatrice. Interpréter le résultat.

Exercice 6. Pondichéry 2014

Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V), se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dans les entreprises d'une grande ville.

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10 \quad a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

On admet que le triplet (a, b, c) est solution du système (S).

$$(S) \begin{cases} a + b + c & = & 1 \\ 27a + 9b + 3c & = & 17,4 \\ 125a + 25b + 5c & = & 73 \end{cases} \text{ et on pose } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

1. **1. a.** Écrire ce système sous la forme $MX = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.
- 1. b.** On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet (a, b, c) solution du système (S).
2. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites ?

Corrections

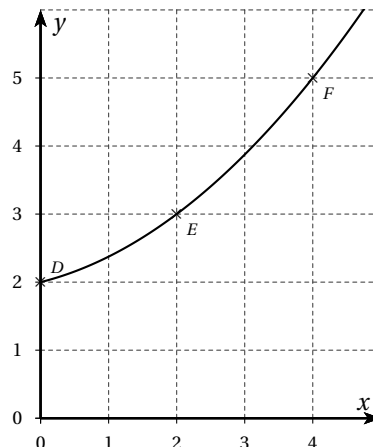
Correction de l'exercice 2 : Amérique du Nord - 2 Juin 2015

Cet exercice est la partie A de l'exercice de spécialité maths de l'épreuve d'Amérique du Nord du 2 Juin 2015.

Un créateur d'entreprise a lancé un réseau d'agences de services à domicile. Depuis 2010, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter. Ainsi, l'entreprise qui comptait 200 agences au 1^{er} janvier 2010 est passée à 300 agences au 1^{er} janvier 2012 puis à 500 agences au 1^{er} janvier 2014.

On admet que l'évolution du nombre d'agences peut être modélisée par une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont trois nombres réels.

La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et $f(x)$ exprime le nombre d'agences en centaines. la valeur 0 de x correspond donc à l'année 2010. Sur le dessin, on a représenté graphiquement la fonction f .



1.

1. a. À partir des données de l'énoncé, écrire un système d'équations traduisant cette situation.

On a d'après les données, puisque $f(x)$ exprime le nombre d'agences en centaines :

- « L'entreprise qui comptait 200 agences au 1^{er} janvier 2010 » soit $f(0) = 2$.
- « L'entreprise qui comptait 300 agences au 1^{er} janvier 2012 » soit $f(2) = 3$.
- « L'entreprise qui comptait 500 agences au 1^{er} janvier 2014 » soit $f(4) = 5$.

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(2) = 3 \\ f(4) = 5 \end{cases} \iff_{f(x)=ax^2+bx+c} \mathcal{S} : \begin{cases} c = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 16a + 4b + c = 5 \end{cases}$$

1. b. En déduire que le système est équivalent à : $MX = R$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On a :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} c = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 16a + 4b + c = 5 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\mathcal{S} \text{ équivaut à } MX = R \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. On admet que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0,125 & -0,25 & 0,125 \\ -0,75 & 1 & -0,25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

À l'aide de cette matrice, déterminer les valeurs des coefficients a , b et c , en détaillant les calculs.

La matrice M est inversible donc :

$$MX = R \Leftrightarrow X = M^{-1} \times R$$

$$MX = R \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 & -0,25 & 0,125 \\ -0,75 & 1 & -0,25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$MX = R \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 \times 2 - 0,25 \times 3 + 0,125 \times 5 \\ -0,75 \times 2 + 1 \times 3 - 0,25 \times 5 \\ 1 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 5 \end{pmatrix}$$

$$MX = R \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 \\ 0,25 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne donc les valeurs cherchées :

$$\boxed{a = 0,125 ; b = 0,25 ; c = 2}$$

3. Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1^{er} janvier 2016.

On a donc

$$f(x) = 0,125x^2 + 0,25x + 2$$

Le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1^{er} janvier 2016 est donné, en centaines, par $f(6)$ soit :

$$\boxed{100 \times f(6) = 800}$$

il y aura 800 agences en 2016.

Correction de l'exercice 3 : Polynésie - 12 Juin 2015

Un constructeur de planches de surf fabrique 3 modèles. La conception de chaque modèle nécessite le passage par 3 postes de travail. Le **tableau 1** indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les planches et le **tableau 2** indique le coût horaire par poste de travail.

Tableau 1	Poste 1	Poste 2	Poste 3		Tableau 2	
Modèle 1	8 h	10 h	14 h		Poste 1	25 €/h
Modèle 2	6 h	6 h	10 h		Poste 2	20 €/h
Modèle 3	12 h	10 h	18 h		Poste 3	15 €/h

1. Soit H et C les deux matrices suivantes : $H = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

1. a. Donner la matrice produit $P = H \times C$.

$$P = H \times C = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$P = H \times C = \begin{pmatrix} 8 \times 25 + 10 \times 20 + 14 \times 15 \\ 6 \times 25 + 6 \times 20 + 10 \times 15 \\ 12 \times 25 + 10 \times 20 + 18 \times 15 \end{pmatrix}$$

$$P = H \times C = \begin{pmatrix} 610 \\ 420 \\ 770 \end{pmatrix}$$

1. b. Que représentent les coefficients de la matrice $P = H \times C$?

La matrice C est celle de coûts horaires par poste et H celle des heures par poste et par modèle.

Les coefficients de la matrice $P = H \times C$ correspondent donc aux prix de revient des différents modèles de planches de surf.

2. Après une étude de marché, le fabricant souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants :

Modèle 1 : 500 €; Modèle 2 : 350 €; Modèle 3 : 650 €

Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés a , b et c , permettant d'obtenir ces prix de revient.

2. a. Montrer que les réels a , b et c doivent être solutions du système : $H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$

On a montré lors de la question 1b. que les coefficients de la matrice $P = H \times C$ correspondent aux prix de revient des différents modèles de planches de surf.

Or ici la matrice de coûts horaires par poste devient $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et celle des prix de revient par modèle $P = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 60 \end{pmatrix}$.

La matrice H restant inchangée, les prix de revient par modèle sont déterminés par :

$$H \times C = P\zeta$$

Les réels a , b et c doivent être solutions du système :

$$H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$$

2. b. Déterminer les réels a , b et c .

Remarque : question assez inhabituelle puisque la matrice inverse de H n'est pas donnée. On va supposer que l'utilisation de la calculatrice est autorisée pour résoudre le système.

On suppose connu le fait que la matrice H est inversible, dans ce cas on a :

$$H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = H^{-1} \times \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$$

La calculatrice nous donne alors directement H^{-1} :

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -2.5 & 1 \\ 0.75 & -1.5 & 0.25 \\ -0.75 & 2.5 & -0.75 \end{pmatrix}$$

De ce fait :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = H^{-1} \times \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -2.5 & 1 \\ 0.75 & -1.5 & 0.25 \\ -0.75 & 2.5 & -0.75 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 12,5 \\ 12,5 \end{pmatrix}}$$