Math93.com

Algorithme d'Euler

Terminale ES option Maths

I Rappels

Définition 1

- Une chaîne, dans un graphe non orienté, est une suite d'arêtes mises bout à bout reliant deux sommets.
- Un graphe est connexe lorsque, pour chaque paire de sommets, il existe au moins une chaîne reliant les deux sommets.
- Une chaîne eulérienne est une chaîne composée de toutes les arêtes du graphe, prises une seule fois.
- Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne dont les extrémités coïncident.

Théorème 1 (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

- Un graphe connexe contient une *chaîne eulérienne* si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
- Un graphe connexe contient un *cycle eulérien* si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair).

Remarque : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse Leonhard d'Euler (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

Théorème 2 (Conséquence)

Un graphe connexe G admet une chaîne eulérienne distincte d'un cycle si et seulement si le nombre de sommets de G de degré impair est égal à 2.
Dans ce cas, si A et B sont les deux sommets de G de degré impair, alors le graphe G admet une chaîne eulérienne d'extrémités A et B.

II Algorithme : Déterminer une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien

Algorithme 1 (Déterminer une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien)

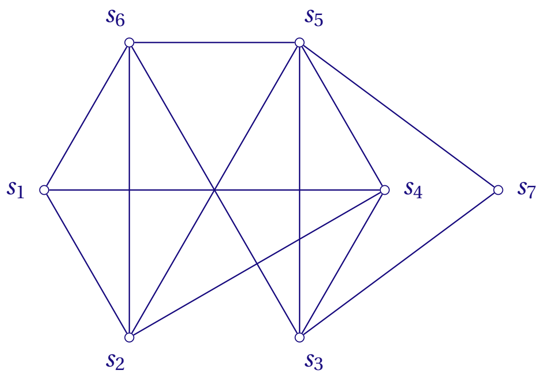
Soit $\mathscr{G}$ un graphe connexe admettant une chaîne eulérienne.

- **Étape 1**
  Former une chaîne reliant les deux sommets de degré impair (en employant une et une seule fois chaque arête). Marquer ces arêtes utilisées en couleur. *Utiliser des couleurs différentes à chaque étape.*
- **Étape 2**
  - Si toutes les arêtes sont utilisées, c'est terminé on a obtenu une chaîne eulérienne (il peut y en avoir d'autres).
  - Sinon, choisir un sommet de la chaîne et insérer un cycle issu de ce sommet utilisant des arêtes non déjà utilisées, et ce une seule fois pour chaque arête.
- **Étape 3**
  Retourner à l'étape 2.
- **Et pour un cycle ?**
  Cet algorithme permet aussi de déterminer un cycle eulérien. Il suffit pour cela lors de l'étape 1 de former un cycle et non une chaîne.

Attention la chaîne obtenue n'est pas unique.

Exemple

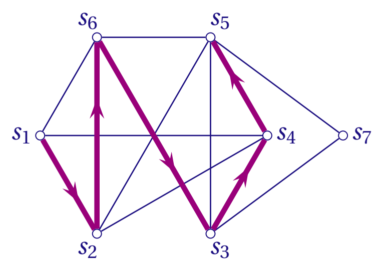
Considérons le graphe suivant :



1. **Le graphe est-il connexe ?**
   Le cycle $\{s_1\,;\,s_6\,;\,s_5\,;\,s_7\,;\,s_3\,;\,s_4\,;\,s_2\,;\,s_1\}$ contient tous les sommets du graphe. Donc G est connexe.
2. **On applique le théorème d'Euler-Hierholzer.**

Sommet	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	Total
Degré	**3**	4	4	4	**5**	4	2	26 (13 arêtes)

   Il n'y a que deux sommets de degré impair s_1 et s_5 et le graphe est connexe donc d'après le théorème d'Euler-Hierholzer, il existe une chaîne eulérienne d'extrémités s_1 et s_5.
3. **On applique l'algorithme.**

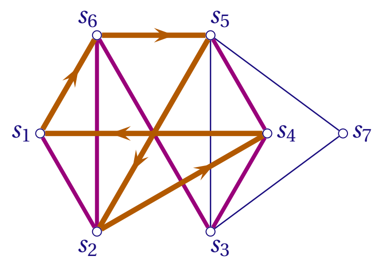


<u>**Étape 1**</u> Les deux sommets de degré impair sont s_1 et s_5

On construit une chaîne simple joignant ces deux sommets :

$$C = \left\{\boxed{s_1}\,;\, s_2\,;\, s_6\,;\, s_3\,;\, s_4\,;\, s_5\right\}$$

On marque les arêtes de la chaîne C



<u>**Étape 2** : un 1^e^ passage</u>

Le cycle simple

$$c_1 = \{s_1\,;\, s_6\,;\, s_5\,;\, s_2\,;\, s_4\,;\, s_1\}$$

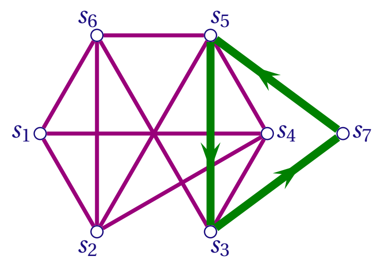
ne contient aucune des arêtes de la chaîne C. On marque le cycle c_1

On fusionne la chaîne C avec le cycle c_1 en remplaçant le sommet s_1 dans la chaîne C par le cycle c_1 :

$$C = \left\{ \underbrace{s_1\,;\, s_6\,;\, s_5\,;\, s_2\,;\, s_4\,;\, s_1}_{s_1}\,;\, s_2\,;\, s_6\,;\, s_3\,;\, s_4\,;\, s_5 \right\}$$

Il reste encore des arêtes non marquées, on <u>recommence l'étape 2</u>

<u>**Étape 3** : on retourne à l'étape 2</u>



Le cycle $c_2 = \{s_3\,;\, s_7\,;\, s_5\,;\, s_3\}$ ne contient aucune des arêtes de la chaîne C.

On fusionne la chaîne C avec le cycle c_2 en remplaçant le sommet s_3 dans la chaîne C par le cycle c_2 :

$$\boxed{C = \left\{ s_1\,;\, s_6\,;\, s_5\,;\, s_2\,;\, s_4\,;\, s_1\,;\, s_2\,;\, s_6\,;\, \underbrace{s_3\,;\, s_7\,;\, s_5\,;\, s_3}_{s_3}\,;\, s_4\,;\, s_5 \right\}}$$

Toutes les arêtes sont marquées C est une chaîne eulérienne.