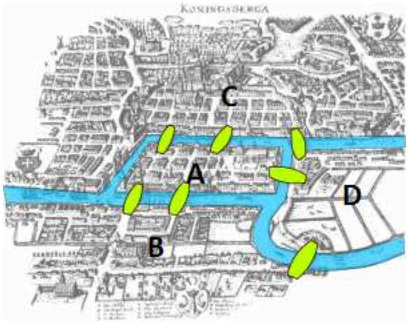
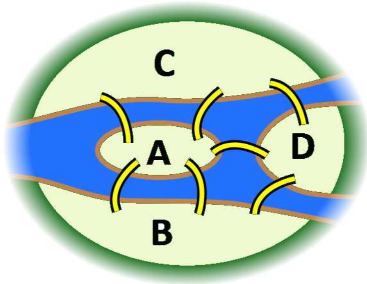
Math93.com

TD n°1 - Terminale ES option Maths
Les Graphes

Le fameux Problème des sept ponts de Königsberg

Le problème des sept ponts de Königsberg est un problème mathématique connu pour être à l'origine de la théorie des graphes. Résolu par le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1736, il se présente de la façon suivante :





La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad en Russie) est construite autour de deux îles situées sur le fleuve Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles.

Probléme 1

Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts.

Un peu d'histoire

C'est le génial mathématicien suisse Euler (1707-1783) qui donna la solution de ce problème en caractérisant les graphes que l'on appelle aujourd'hui « eulériens » en référence à l'illustre mathématicien. Il propose un théorème répondant au problème, sans preuve, en 1736. Un siècle plus tard, le mathématicien allemand Carl Hierholzer (1840-1871) expose une démonstration, juste avant sa mort prématurée en 1871, à un collègue qui la publie à titre posthume en 1873. La solution d'Euler au problème du pont de Königsberg est considérée comme le premier théorème de la théorie des graphes et la première preuve vraie dans la théorie des réseaux , sujet désormais considéré généralement comme une branche de la combinatoire.

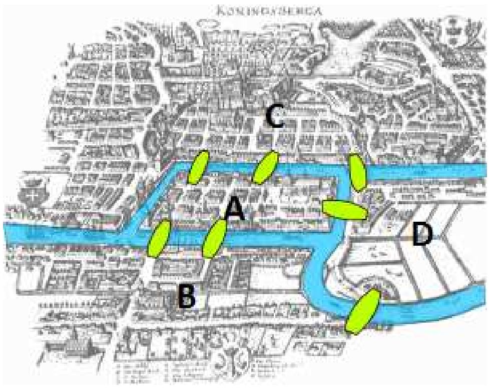
1. Commencez par modéliser le problème à l'aide d'un graphe.
2. Établir les éléments caractéristiques du graphe : Ordre, degrés des sommets, graphe simple ou pas, complet ou pas ...
3. Essayer de trouver une solution au problème ... pas trop longtemps ...
4. Quelle(s) arête(s) peut-on ajouter au graphe pour qu'une solution existe ? Écrire alors le cycle eulérien obtenu.
5. Si on n'impose plus de revenir à son point de départ, quelle arête peut-on ajouter au graphe pour qu'une solution existe ? Écrire alors la chaîne eulérien obtenue.

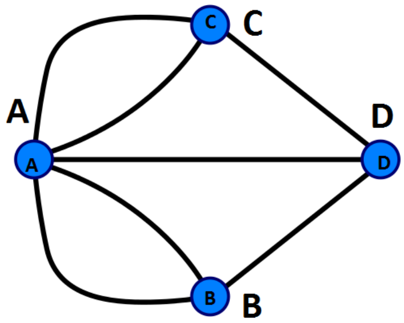
Définition 1

- Une chaîne, dans un graphe non orienté, est une suite d'arêtes mises bout à bout reliant deux sommets.
- Une chaîne orientée, dans un graphe orienté, est une suite d'arêtes orientées telles que l'extrémité terminale de l'une est l'extrémité initiale de l'autre.
- Un cycle, dans un graphe, est une chaîne dont les extrémités coïncident, composée d'arêtes toutes distinctes. Une chaîne est notée par la liste des sommets où elle passe, reliés par un segment ou une flèche quand le graphe est orienté.
- Un graphe est connexe lorsque, pour chaque paire de sommets, il existe au moins une chaîne reliant les deux sommets.
- Une chaîne eulérienne est une chaîne composée de toutes les arêtes du graphe, prises une seule fois.
- Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne dont les extrémités coïncident.

Correction

1. Commencez par modéliser le problème à l'aide d'un graphe.





2. Établir les éléments caractéristiques du graphe : Ordre, degrés des sommets, graphe simple ou pas, complet ou pas ...

- Ordre du graphe : 4 car il a 4 sommets.
- Degré des sommets :

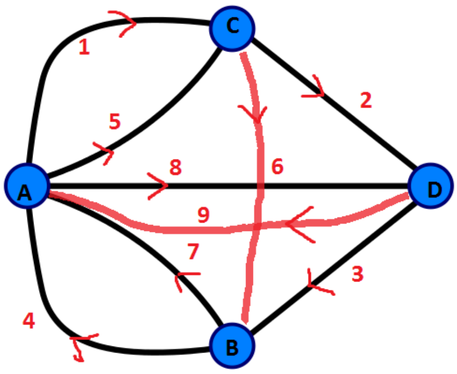
Sommet	A	B	C	D	Total
Degré	5	3	3	3	14 (7 arêtes)

- Le graphe n'est pas simple car les sommets A-B et A-C sont reliés par deux arêtes.
- Le graphe n'est pas complet car il n'est pas simple.

3. Essayer de trouver une solution au problème ... pas trop longtemps ...

Le problème n'admet pas de solution car le graphe admet 4 sommets de degré impair.

4. Quelles arêtes peut-on ajouter au graphe pour qu'une solution existe ?



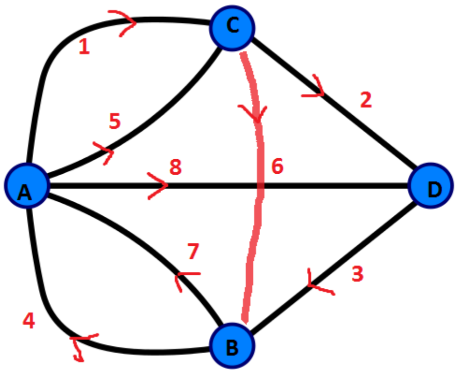
On obtient ainsi un graphe dont tous les sommets sont de degré pair.

Sommet	A	B	C	D	Total
Degré	6	4	4	4	18 (9 arêtes)

Le cycle eulérien obtenu est alors :

$$A-C-D-B-A-C-B-A-D-A$$

5. Si on n'impose plus de revenir à son point de départ, quelle arête peut-on ajouter au graphe pour qu'une solution existe ? Écrire alors la chaîne eulérien obtenue.



On obtient ainsi un graphe dont exactement 2 sommets sont de degré impair les sommets A et D de degré respectifs 5 et 3.

Sommet	**A**	B	C	**D**	Total
Degré	**5**	4	4	**3**	16 (8 arêtes)

La chaîne eulérienne obtenue est alors :

$$A-C-D-B-A-C-B-A-D$$