Math93.com

Les Matrices

Terminale ES option Maths

I Définitions

I.1 Matrice

Définition 1 (Mémo : Ligne × Colonne)

On appelle matrice de dimension $m \times n$, ou d'ordre $m \times n$, ou de format (m, n), un tableau de m lignes et n colonnes de nombres réels.
Les nombres de la matrice sont appelés **coefficients de la matrice**.
On note $a_{i,j}$ l'élément de la matrice situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne.

Mémo : Dimension = (Lignes , Colonnes)

Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Exemple

La matrice $P = \begin{pmatrix} 110 & 120 & 130 \\ 210 & 220 & \boxed{230} \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre 2×3, le coefficient $a_{2,3}$ de la matrice P est $a_{2,3} = 230$.
On a donc :

$$P = \begin{pmatrix} 110 & 120 & 130 \\ 210 & 220 & 230 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

I.2 Matrices particulières

I.2.1 Matrice carrée

Définition 2

Une matrice ayant le même nombre n de lignes et de colonnes est une matrice carrée d'ordre n.

Exemple

La matrice $M = \begin{pmatrix} -12 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de dimension 3.

I.2.2 Matrice diagonale

Définition 3

Une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls, sauf éventuellement les coefficients de la diagonale, est appelée matrice diagonale.

Exemple

La matrice $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-5&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ est une matrice diagonale. La matrice $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-5&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ n'est pas une matrice diagonale.

I.2.3 Matrice Identité

Définition 4

La matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients sur la diagonale sont égaux à 1 est appelée matrice identité d'ordre n, on la note I_n.

Exemple

$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $I_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

I.2.4 Vecteur ligne

Définition 5

Une matrice formée d'une seule ligne et de n colonnes est une matrice ligne ou vecteur ligne.

Exemple

La matrice $A=\begin{pmatrix}60&50&0\end{pmatrix}$ est une matrice ligne de dimension 1×3.

I.2.5 Vecteur colonne

Définition 6

Une matrice formée de m lignes et d'une seule colonne est une matrice colonne ou vecteur colonne.

Exemple

La matrice $C=\begin{pmatrix}25\\28\\30\end{pmatrix}$ est une matrice colonne de dimension 3×1.

I.3 Égalité de deux matrices

Définition 7

Deux matrices A et B sont égales si, et seulement si, elles ont même dimension et que tous leurs éléments situés à la même place sont égaux.

Exemple

Dire que les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2-a & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & b+2 \end{pmatrix}$ sont égales signifie que

$$\begin{cases} 2-a=1 \\ b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

II Matrices et opérations

II.1 Transposée d'une matrice

Définition 8

La transposée ${}^tA$ (aussi notée A^T) d'une matrice A de dimension $m \times n$ est la matrice de dimension $n \times m$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.
Si la matrice A est de termes a_{ij}, alors sa transposée est de termes a_{ji}.

Exemple

La transposée de la matrice $P = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$ de dimension 2×3 est la matrice ${}^tP = \begin{pmatrix} 60 & 70 \\ 50 & 90 \\ 0 & 120 \end{pmatrix}$ de dimension 3×2.

II.2 Addition de matrices

Définition 9

La somme de deux matrices A et B de **même dimension** est la matrice notée $A+B$ obtenue en ajoutant les éléments de A et ceux de B situés à la même place.
Si $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ et $B = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ sont deux matrices d'ordre $m \times n$ alors

$$A+B = \left(a_{i,j}+b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$$

Exemple

Soient les matrices $P_0 = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$ et $P_1 = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$:

$$P_0 + P_1 = \begin{pmatrix} 50+60 & 40+50 & 0+0 \\ 70+70 & 90+90 & 120+120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 & 90 & 0 \\ 140 & 180 & 240 \end{pmatrix}$$

II.2.1 Propriétés

Définition 10

Si A, B et C sont des matrices de même dimension alors :

- $A+B = B+A$.
- $A+(B+C) = (A+B)+C$

II.3 Multiplication par un réel

Définition 11

Le produit d'une matrice A par un réel k est la matrice kA obtenue en multipliant chaque élément de A par le réel k.
Si $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ est une matrice d'ordre $m \times n$ alors pour tout réel k

$$kA = \left(ka_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$$

Exemple

Si $P = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$ alors :

$$1,1 \times P = \begin{pmatrix} 1,1 \times 60 & 1,1 \times 50 & 1,1 \times 0 \\ 1,1 \times 70 & 1,1 \times 90 & 1,1 \times 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 55 & 0 \\ 77 & 99 & 132 \end{pmatrix}$$

II.3.1 Propriété

Définition 12

Soient A et B deux matrices de même dimension et k un réel on a :

$$k\,(A+B) = kA + kB$$

III Produit de matrices

III.1 Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne

Définition 13

Soient L une matrice ligne de dimension $1 \times n$ et C une matrice colonne de dimension $n \times 1$.
Le produit $L \times C$ de ces deux matrices est :

$$\begin{pmatrix} l_1 & \cdots & l_i & \cdots & l_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (l_1 \times c_1 + \cdots + l_i \times c_i + \cdots + l_n \times c_n)$$

Le produit $L \times C$ de ces deux matrices est la matrice de dimension 1×1 qui n'a qu'un seul élément.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 30 \end{pmatrix} = (60 \times 25 + 50 \times 28 + 0 \times 30) = (2900)$$

III.2 Produit de deux matrices (Ligne × Colonne)

Définition 14

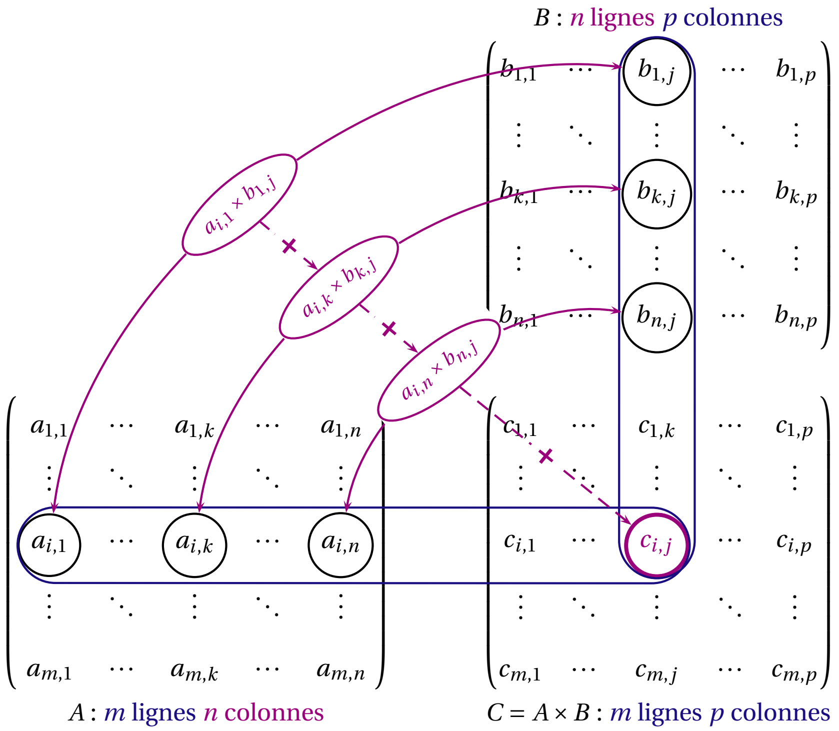
Soit A et B deux matrices d'ordres respectifs (m, n) et (n, p).
La produit $A \times B$ est la matrice P d'ordre (m, p), de coefficients p_{ij} avec :

$$p_{ij} = L_i \times C_j$$

où L_i est la $i^{\text{ième}}$ ligne de A et C_j est la $j^{\text{ième}}$ colonne de B.

Chaque élément $p_{i,j}$ de la matrice P est le produit de la matrice constituée de la i-ième ligne de la matrice A par la matrice constituée de la j-ième colonne de la matrice B ($1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$).

Mémo **: Ligne × Colonne**



Exemple

Soient les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$$

La matrice A est d'ordre 2×2 et la matrice B est d'ordre 2×3. Le produit $C = A \times B$ est une matrice d'ordre 2×3 :

- L'élément $c_{1,1}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \times 60 + 0,4 \times 70 \end{bmatrix}$
- L'élément $c_{1,2}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 50 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \times 50 + 0,4 \times 90 \end{bmatrix}$
- L'élément $c_{1,3}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \times 0 + 0,4 \times 120 \end{bmatrix}$
- L'élément $c_{2,1}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \times 60 + 0,6 \times 70 \end{bmatrix}$
- L'élément $c_{2,2}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 50 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \times 50 + 0,6 \times 90 \end{bmatrix}$
- L'élément $c_{2,3}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \times 0 + 0,6 \times 120 \end{bmatrix}$

Soit en définitive :

$$C = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 46 & 48 \\ 90 & 94 & 72 \end{pmatrix}$$

Exemple

Soient les deux matrices :

$$A' = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \text{ et } B' = \begin{pmatrix} 60 & 50 \\ 70 & 90 \end{pmatrix}$$

La matrice A' est d'ordre 2×2 et la matrice B' est d'ordre 2×2. Le produit $C' = A' \times B'$ est une matrice d'ordre 2×2 :

- L'élément $c'_{1,1}$ de la matrice C' s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \times 60 + 0,4 \times 70 \end{bmatrix} = [40]$
- L'élément $c'_{1,2}$ de la matrice C' s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 50 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \times 50 + 0,4 \times 90 \end{bmatrix} = [46]$
- L'élément $c'_{2,1}$ de la matrice C' s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \times 60 + 0,6 \times 70 \end{bmatrix} = [90]$
- L'élément $c'_{2,2}$ de la matrice C' s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 50 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \times 50 + 0,6 \times 90 \end{bmatrix} = [94]$

Soit en définitive :

$$C' = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 & 50 \\ 70 & 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 46 \\ 90 & 94 \end{pmatrix}$$

III.2.1 Remarque : Attention aux dimensions

Si le nombre de colonnes de la matrice A est différent du nombre de lignes de la matrice B, le produit $A \times B$ n'est pas défini !

III.3 Attention : Non Commutativité

Il n'y a pas commutativité de la multiplication matricielle, il faut faire très attention à l'ordre dans lequel on effectue les calculs :

$$A \times B \neq B \times A \qquad \text{(en général)}$$

Remarque : On peut trouver des matrices qui "commutent" mais la commutativité n'est pas généralisable à toutes les matrices.

Exemple

- Un exemple de non commutativité :

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Un exemple de deux matrices qui commutent : Soient A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors :

- D'une part :

$$B \times A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4I_3$$

- D'autre part :

$$A \times B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4I_3$$

- On a bien exhibé deux matrices qui commutent :

$$A \times B = B \times A$$

III.4 Cas particulier : Avec des matrices lignes et colonnes (souvent au bac)

Propriété 1

Par définition du produit matricielle :

- Le produit d'une matrice d'ordre (m, n) par une matrice colonne d'ordre $(n, 1)$ est une matrice colonne d'ordre $(m, 1)$.
- Le produit d'une matrice ligne d'ordre $(1, n)$ par une matrice d'ordre (n, p) par une matrice ligne d'ordre $(1, p)$.

Exemple 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 10 + 2 \times 11 + 3 \times 12 \\ 4 \times 10 + 1 \times 11 + 0 \times 12 \\ 2 \times 10 + 0 \times 11 + 1 \times 12 \\ 0 \times 10 + 1 \times 11 + 2 \times 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 51 \\ 32 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Exemple 2

$$\begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{10 \times 1 + 11 \times 0 + 12 \times 2}_{34} & \underbrace{10 \times 2 + 11 \times 1 + 12 \times 0}_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 31 \end{pmatrix}$$

III.5 Puissances d'une matrice carré

Définition 15

Soit A une matrice carré d'ordre n et p un entier supérieur ou égal à 1.
La puissance p-ième de la matrice A est la matrice carrée d'ordre n obtenue en effectuant le produit de p matrices égales à A.

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \cdot \times A}_{p \text{ fois}}$$

Par convention, une matrice quelconque non nulle à la puissance 0 est égale à la matrice identité, on a :

$$A^0 = I_n$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4I_3$$

Mais on a aussi

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3$$

On remarque que les matrices A et A^2 commutent, c'était l'exemple proposé dans le paragraphe III.3 : $A \times A^2 = A^2 \times A$.

III.6 Propriétés et opérations

Définition 16

Soient A, B et C trois matrices carrées et k en réel non nul :

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$.
- $k(A \times B) = (kA) \times B$.
- Si $A = B$ alors on a :

$$A \times C = B \times C \text{ et } C \times A = C \times B$$

Attention

- $A \times C = B \times C$ ne signifie pas nécessairement que $A = B$.

  Exemple.

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A \times B = 0$ ne signifie pas nécessairement que $A = 0$ ou $B = 0$.

  Exemple.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 5 & -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

IV Inverse d'une Matrice carrée

IV.1 Matrice identité

Propriété 2

Soit A une matrice carrée d'ordre n et I_n la matrice identité d'ordre n alors

$$A \times I_n = I_n \times A = A$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

IV.2 Inverse d'une matrice carrée

IV.2.1 Définition

Définition 17 (et propriété)

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

- S'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que

$$A \times B = B \times A = I_n$$

  Alors la matrice A est dite <u>inversible</u> et B est son inverse.
- Si la matrice A est inversible, son inverse est <u>unique</u> et est notée A^{-1}.

En pratique, pour montrer qu'une matrice est la matrice inverse d'une matrice donnée on ne va montrer qu'une seule égalité, en effet :

Propriété 3

Soit B une matrice carrée d'ordre n telle que $A \times B = I_n$, alors on a nécessairement $B \times A = I_n$.

Point Bac

Les exercices du Bac ne demandent que rarement (sauf sujet Polynésie du 12 Juin 2015 du TD) de calculer l'inverse d'une matrice donnée. Si c'est la cas, on exige juste le résultat à l'aide de la calculatrice. La question est plus classiquement de prouver qu'une matrice est l'inverse d'une autre.

- **Exemple** : **Soit A et B définies ci-dessous. Montrer que B est l'inverse de la matrice A.**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{3} & \mathbf{-6} \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{15} & \mathbf{8} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-9} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$$

  On a facilement :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

  Cela suffit puisque l'on a montré (propriété 3) que :

$$AB = I_3 \Longrightarrow BA = I_3$$

  La matrice A est inversible, d'inverse la matrice $B = A^{-1}$.

V Application aux systèmes linéaires

Définition 18

Un système linéaire à n équations et n inconnues :

$$(S)\ :\ \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

peut s'écrire sous la forme matricielle

$$AX = B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\ ;\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\ ;\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A est une matrice carrée d'ordre n, X et B sont des matrices colonnes de dimension $n \times 1$.
Si la matrice A est inversible, alors le système admet une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

Propriété 4

Soit un système linéaire ayant pour écriture matricielle $AX = B$, où A est une matrice carrée d'ordre n, X et B sont des matrices colonnes de dimension $n \times 1$.

Exemple

Soit le système

$$(S)\ :\ \begin{cases} x - 3y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ -4x + 3y - 6z = 1 \end{cases}$$

Posons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -6 \end{pmatrix}\ ;\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ \text{ et }\ B = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors le système (S) peut s'écrire sous la forme matricielle $AX = B$
La matrice A est inversible et d'après l'exemple du IV.2.1 on a :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

On en déduit en multipliant les deux membres de l'égalité par A^{-1} que :

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1} \times AX = A^{-1} \times B$$

Or le produit d'une matrice par son inverse est égal à la matrice identité soit :

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow \underbrace{A^{-1} \times A}_{I_3} \times X = A^{-1} \times B \\ &\Leftrightarrow I_3 \times X = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow X = A^{-1}B \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -9 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

On obtient ainsi, l'unique solution du système $\underline{x = -4\ ;\ y = -3 \text{ et } z = 1}$.