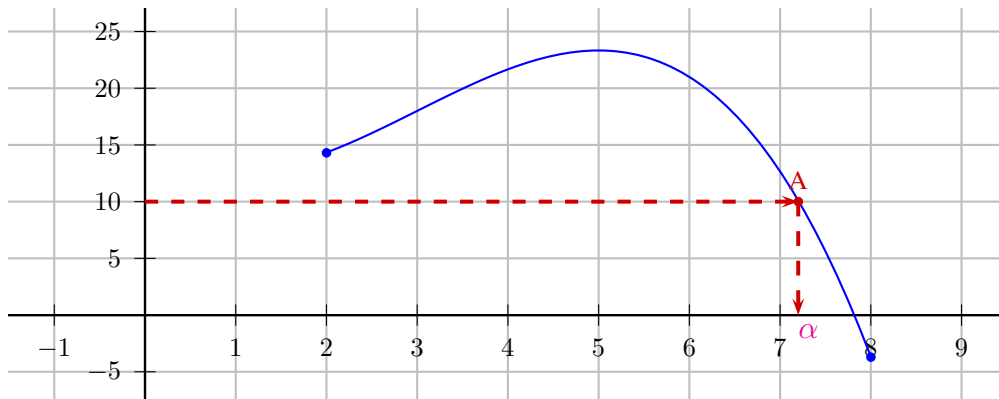




### Le TVI, c'est ma passion ... Suivez le guide

#### Exemple 1 (Résolution de $f(x) = 10$ )

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[2; 8]$  par :  $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x + 15$ .



#### 1. Étudier les variations de $f$ sur $[2; 8]$ .

- La fonction  $f$  est définie sur  $[2; 8]$  donc continue et dérivable sur cet intervalle comme somme et composée de fonctions qui le sont.
- Pour tout réel  $x$  de  $[2; 8]$  on a  $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x + 15$  donc :

$$f'(x) = -\frac{3x^2}{3} + 3 \times 2x - 5 = \underline{\underline{-x^2 + 6x - 5}}$$

- Cas général sur  $\mathbb{R}$  : étude de  $x \mapsto -x^2 + 6x - 5$  sur  $\mathbb{R}$  (on ne la nomme pas).  
La fonction  $x \mapsto -x^2 + 6x - 5$  une fonction polynôme du second degré de la forme  $ax^2 + bx + c$  avec :

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -5 \end{cases} \implies \Delta = 16 > 0 \implies \begin{cases} x_1 = \frac{-6 + \sqrt{16}}{-2} = 1 \notin [2; 8] \\ x_2 = \frac{-6 - \sqrt{16}}{-2} = 5 \in [2; 8] \end{cases}$$

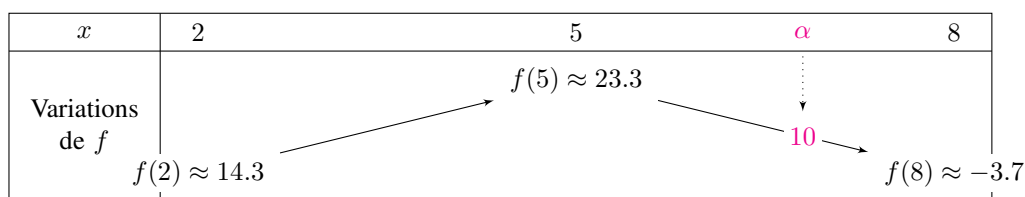
Le discriminant étant positif strictement, le trinôme  $(-x^2 + 6x - 5)$  a deux racines réelles. Il est du signe de  $a = -1 < 0$  soit négatif à l'extérieur des racines et positif ailleurs.

- Retour sur la dérivée sur  $[2; 8]$ . La dérivée  $f'$  est donc positive de 2 à 5 et négative ailleurs soit le tableau de variations suivant :

$x$	2	5	8	
$f'(x)$		+	0	-
Variations de $f$	$f(2) \approx 14.3$	$f(5) \approx 23.3$	$f(8) \approx -3.7$	

**Exemple 1** (Suite de l'exercice type, résolution de  $f(x) = 10$ )

2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 10$ .



**Point Bac : Alerte TVI!**

**Méthode 1** (Nombre de solutions d'une équation et TVI)

On va appliquer le corollaire du TVI sur chaque intervalle où la fonction est monotone. On va essayer d'en éliminer certains qui ont un maximum ou un minimum qui permettent d'affirmer la non-existence de solution.

**Théorème 1** (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si  $f$  est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle  $[a ; b]$ , alors, pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une unique solution dans  $[a ; b]$ .



Bernard Bolzano  
(1781-1848)

Sur  $[2 ; 5]$ .

Sur l'intervalle  $[2 ; 5]$ , la fonction  $f$  admet  $f(2) \approx 14,3$  comme minimum. De ce fait, l'équation  $f(x) = 10$  n'admet pas de solution.

Sur  $[5 ; 8]$  :

- La fonction  $f$  est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle  $[5 ; 8]$  ;
- On a  $k = 10$  compris entre  $f(5) \approx 23,3$  et  $f(8) \approx -3,7$  ;
- Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation  $f(x) = 10$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $[5 ; 8]$ .

Bilan : sur l'intervalle  $[2 ; 8]$ , l'équation  $f(x) = 10$  admet donc une unique solution  $\alpha$ .

3. Déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  au centième.

**Point Bac : Approximation de la solution d'une équation par balayage**

**Méthode 2** (Approximation de la solution d'une équation par balayage)

On cherche à encadrer  $\alpha$ . On va utiliser la fonction **TABLE** de la calculatrice en partant de la borne inférieure de l'intervalle (ici on part de 5 sur  $[5 ; 8]$ ). On réglera le **PAS** ou **STEP** progressivement sur 1, puis sur 0,1 et enfin sur 0,01 à l'aide du **MENU TABLE SET** afin d'affiner l'encadrement mais on ne présente sur sa copie que l'encadrement final demandé.

- Avec un pas de  $\Delta = 0.01$  on obtient :  $\left\{ \begin{array}{l} f(7,20) \approx 10,104 > 10 \\ f(7,21) \approx 9,97 < 10 \end{array} \right.$ , donc  $7,20 < \alpha < 7,21$ .

Une valeur approchée de  $\alpha$  à 0.01 près est donc  $\alpha \approx 7,20$ .

# Résolution d'équations et TVI

## Exercice 1. Suivons le guide

On va reprendre les questions de l'exemple 1 avec une autre fonction.

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 10]$  par :

$$f : \begin{cases} [0; 10] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 1 \end{cases}$$

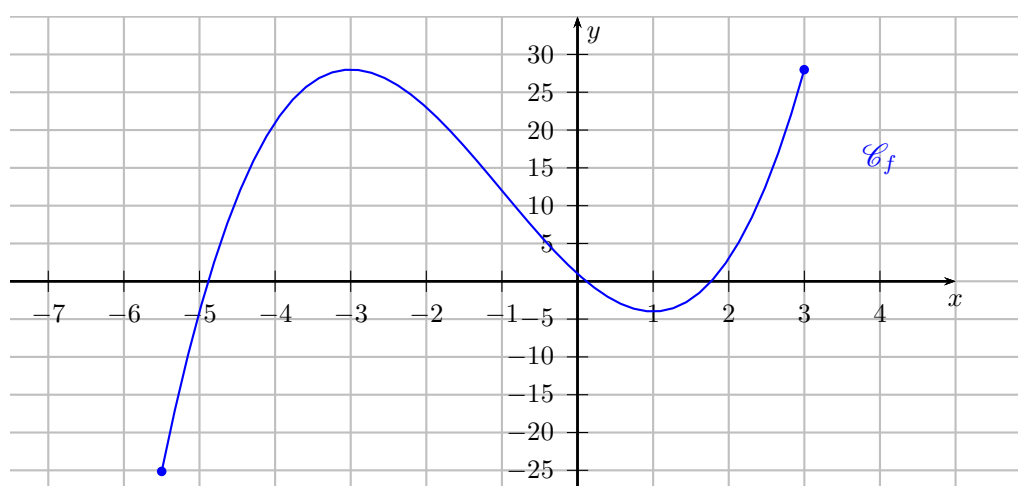
1. Montrer rapidement que  $f$  est continue et dérivable sur  $[0; 10]$ .
2. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $[0; 10]$ .
3. Déterminer sur l'intervalle  $[0; 10]$  le nombre de solutions de l'équation :

$$f(x) = 40$$

4. Donner une valeur approchée de la (ou des) solution(s) au centième.

**Réponses :** (2.)  $f$  croissante sur  $[0; 2]$ , décroissante sur  $[2; 6]$  et croissante sur  $[6; 10]$ . (4.)  $\alpha \approx 9,51$ .

## Exercice 2. Courbe de la fonction et équation



On considère la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $[-5.5; 3]$ .

1. D'après le graphique, dresser le tableau de variation de  $f$  et le tableau de signe de la fonction dérivée  $f'$  sur  $[-6; 3]$ .
2. La fonction  $f$  est en fait la fonction :

$$f : \begin{cases} [-5.5; 3] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1 \end{cases}$$

2. a. Déterminer la dérivée de  $f$  sur  $[-5.5; 3]$  puis étudier son signe sur cet intervalle.
  2. b. En déduire les variations de  $f$  sur  $[-5.5; 3]$ . On fera clairement figurer les images par  $f$  des bornes de l'intervalle d'étude et des racines de  $f'$ .
  2. c. Vérifiez que ces résultats sont cohérents avec ceux de la question 1.
- 3. Approximation de la solution d'une équation.**

On cherche à résoudre l'équation  $f(x) = -20$ . C'est une équation de degré 3 que l'on ne sait pas résoudre à notre niveau.

3. a. Montrer que l'équation  $f(x) = -20$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle de définition. Donner un intervalle contenant  $\alpha$  sur lequel la fonction est monotone.
3. b. Par lecture graphique, donner une valeur approchée de  $\alpha$ .
3. c. Avec la calculatrice, donner une valeur approchée de  $\alpha$  au centième.

**Exercice 3. Courbe de la dérivée !!**

**Point Bac : Danger, on donne la courbe de la dérivée, pas de la fonction.**

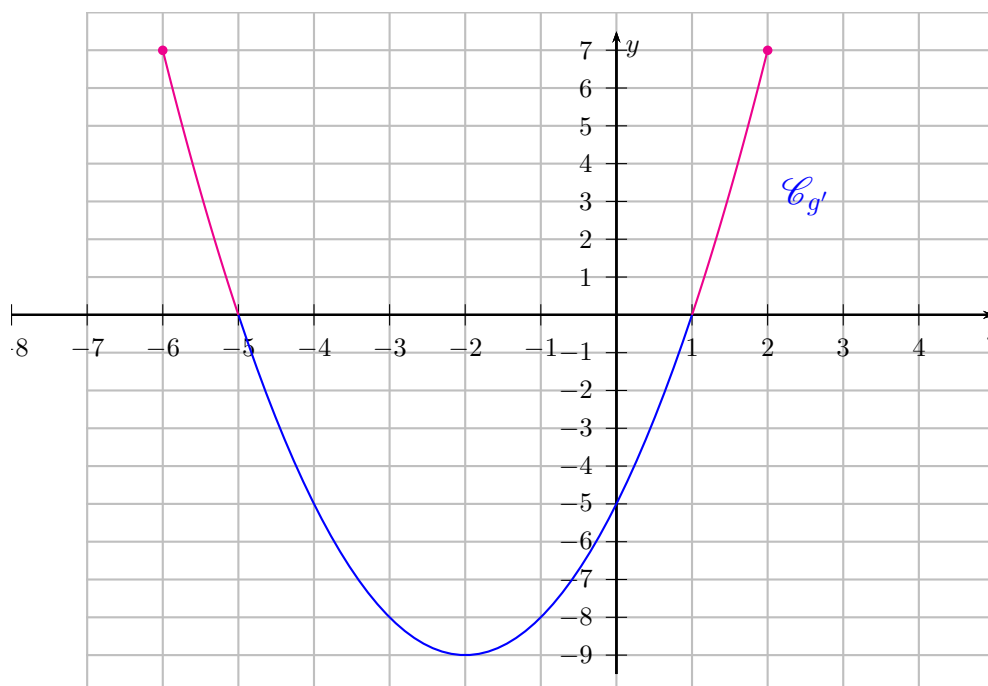
C'est une question classique.

**Méthode 3**

On donne la courbe de la dérivée et il faut en déduire le tableau de variation de la fonction. Une chose à retenir :

« CE QUI NOUS INTÉRESSE SUR LA DÉRIVÉE C'EST SON SIGNE »

On va donc établir un tableau de signe de la fonction tracée, c'est à dire regarder pour quelles valeurs de  $x$  sa courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, et en-dessous.



On a ci-dessus construit la courbe représentative de la fonction  $g'$ , la dérivée d'une fonction  $g$ , définie et dérivable sur  $[-6; 2]$ .

1. D'après le graphique, dresser le tableau de signe de  $g'(x)$  et le tableau de variation de  $g$  sur  $[-6; 2]$ .
2. La fonction  $g$  est en fait la fonction :

$$g : \begin{cases} [-6; 2] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto g(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x + 1 \end{cases}$$

2. a. Déterminer la dérivée de  $g$  sur  $[-6; 2]$  puis étudier son signe sur cet intervalle.
  2. b. En déduire les variations de  $g$  sur  $[-6; 2]$ . On fera clairement figurer les images par  $g$  des bornes de l'intervalle d'étude et des racines de  $g'$ .
  2. c. Vérifiez que ces résultats sont cohérents avec ceux de la question 1.
- 3. Approximation de la solution d'une équation.**

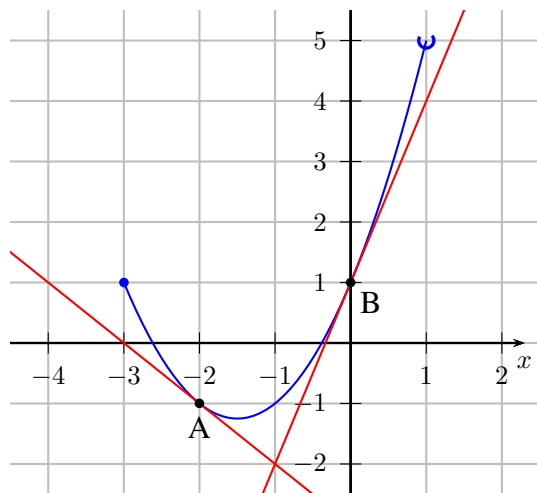
On cherche à résoudre l'équation  $g(x) = 5$ . C'est une équation de degré 3 que l'on ne sait pas résoudre à notre niveau.

3. a. Montrer que l'équation  $g(x) = 5$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[-6; 2]$ . Donner un intervalle contenant  $\alpha$  sur lequel la fonction est monotone.
3. b. Donner une valeur approchée de  $\alpha$  au centième.

# Quelques lectures graphiques

## Exercice 4. Lecture graphique puis calculs

On a tracé  $\mathcal{C}_f$ , la courbe de  $f$  définie et dérivable sur  $[-3; 1[$  ainsi que la tangente à  $\mathcal{C}_f$  aux points A et B d'abscisses respectives  $-2$  et  $0$ .



1. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(-2) = \dots\dots$$

2. Équation de  $T_{-2}$ , la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $A(-2; -1)$  :

$$T_{-2} : y = \dots\dots$$

3. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(0) = \dots\dots$$

4. Équation de  $T_0$ , la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $B(0; 1)$  :

$$T_0 : y = \dots\dots$$

5.  $f$  est en fait la fonction définie sur  $[-3; 1[$  par  $f(x) = x^2 + 3x + 1$ . Retrouver les résultats des premières questions.

6. Résolution de l'équation  $f(x) = 2$  :

6. a. Déterminer le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 2$  sur l'intervalle de définition (TVI!).

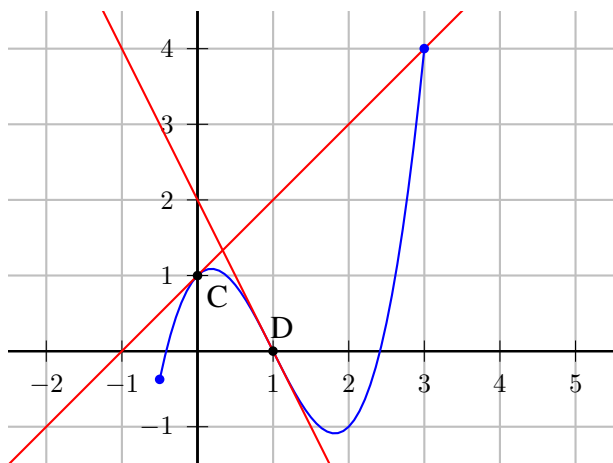
6. b. Retrouver graphiquement ce résultat puis donner une approximation de ou des solutions.

6. c. Retrouver ce résultat en résolvant l'équation.

Réponses :  $f'(-2) = -1$  ;  $T_{-2} : y = -x - 3$  ;  $f'(0) = 3$  ;  $T_0 : y = 3x + 1$  ;  $\alpha = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \approx 0,3$

## Exercice 5. Lecture graphique puis calculs

On a tracé  $\mathcal{C}_g$  la courbe de  $g$  définie et dérivable sur  $[-0.5; 3]$  ainsi que les tangentes à  $\mathcal{C}_g$  aux points  $C(0; g(0))$  et  $D(1; g(1))$ .



1. Lecture du nombre dérivé :

$$g'(0) = \dots\dots$$

2. Équation de  $T_0$ , la tangente à  $\mathcal{C}_g$  en  $C(0; 1)$  :

$$T_0 : y = \dots\dots$$

3. Lecture du nombre dérivé :

$$g'(1) = \dots\dots$$

4. Équation de  $T_1$ , la tangente à  $\mathcal{C}_g$  en  $D(1; 0)$  :

$$T_1 : y = \dots\dots$$

5.  $g$  est en fait la fonction définie sur  $[-0.5; 3]$  par  $g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ . Retrouver les résultats des premières questions.

6. Résolution de l'équation  $g(x) = 2$  :

6. a. Déterminer le nombre de solutions de l'équation  $g(x) = 2$  sur l'intervalle de définition (TVI!).

6. b. Donner graphiquement une approximation de cette (ces) solution(s) au dixième.

6. c. A l'aide de la calculatrice (Menu TABLE), donner une approximation de la (des) solution(s) au centième.

Réponses :  $g'(0) = 1$  ;  $T_0 : y = x + 1$  ;  $g'(1) = -2$  ;  $T_1 : y = -2x + 2$  ;  $\alpha \approx 2,77$

# Applications économiques

## Exercice 6. Une fonction auxiliaire $g$ pour étudier $f$

### Point Bac : Utilisation d'une fonction auxiliaire.

C'était un grand classique il y a quelques années. On rencontre tout de même encore assez souvent ce genre d'exercice.

#### Méthode 4

On introduit une fonction  $g$  qui va en fait permettre d'étudier le signe de la dérivée de  $f$  (la dérivée  $f'$  s'exprime en fonction de  $g$  et d'un facteur positif très souvent).

Il faut donc ne pas perdre de vue que l'unique intérêt de  $g$ , est son SIGNE. On va donc :

- Étudier les variations de  $g$ .
- Résoudre l'équation  $g(x) = 0$ . Pour cela on utilise le TVI pour dénombrer les solutions puis on trouve des valeurs approchées de ces dernières.
- En déduire le signe de  $g$ . On utilisera généralement le tableau de variation de  $g$  en plaçant les solutions de l'équation  $g(x) = 0$ .
- Le signe de  $g$  nous donne alors celui de  $f'$  et donc les variations de  $f$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[1 ; 10]$  par :

$$f : \begin{cases} [1 ; 10] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) = 2x^2 - 30x + 200 + \frac{50}{x} \end{cases}$$

1. Calculer la dérivée de  $f$  et vérifier que pour tout  $x$  de  $[1 ; 10]$  :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \quad \text{où } g(x) = 4x^3 - 30x^2 - 50$$

2. Étude d'une fonction auxiliaire  $g$ .

2. a. Expliquer rapidement pourquoi  $f'$  est du signe de  $g$  sur  $[1 ; 10]$ .

2. b. Étudier les variations de la fonction  $g$  sur  $[1 ; 10]$ .

2. c. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[1 ; 10]$  et en donner une valeur approchée au centième.

2. d. En déduire le signe de  $g$  sur  $[1 ; 10]$ .

3. En déduire alors les variations de  $f$  sur  $[1 ; 10]$ .

4. Applications économiques.

Le coût moyen de production d'une entreprise est donné par  $f(x)$  où  $x$  est la quantité produite en tonnes, variant de 1 à 10 tonnes de production, et  $f(x)$  est exprimée en milliers d'euros.

4. a. Déterminer une valeur approchée, à 100 euros près, du coût moyen minimum de production.

4. b. Déterminer au centième de tonnes près, la production correspondante à un coût moyen de 175 000 euros.

Réponses : (2a.)  $\alpha \approx 7,71$ . (4a.) environ 94 000 euros (4b.)  $p \approx 1,94$ .

## EPI : Exercices à Prise d'Initiative

Un exercice à prise d'initiative (EPI) est un exercice non guidé. Le candidat devra faire preuve d'initiative, introduire une fonction par exemple permettant de résoudre le problème posé.

### Exercice 7. EPI : Résolution d'une équation

Résoudre sur l'intervalle  $[1 ; 9]$  l'équation (E) :

$$2x^3 + 3x^2 - 120x + 1 = 0$$

Réponse :  $\alpha \approx 7,03$