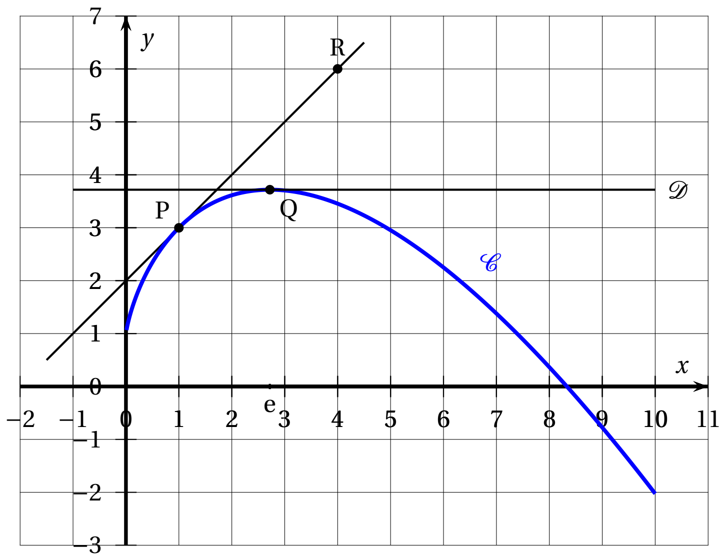
Math93.com

TD n°2 - Terminale ES/L
Continuité et Convexité

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD. Les autres présentent des éléments de réponses et un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Des QCM du Bac

Exercice 1. QCM ... ou presque ... Polynésie septembre 2017



La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-dessous dans un repère orthonormé d'origine O est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.

- On considère les points P $(1\,;\,3)$ et R $(4\,;\,6)$.
- Le point Q a pour abscisse e, avec $e \approx 2{,}718$.
- Les points P et Q appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$. La droite $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point Q.
- La droite (PR) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point P et la droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point Q.

Partie A (***la partie B était un exercice classique indépendant***)

Dans cette partie, les résultats seront donnés à l'aide d'une lecture graphique et sans justification.

1. Parmi les trois propositions ci-dessous, quelle est celle qui désigne l'équation de la droite (PR) ?

a. $y = 2x + 1$ **b.** $y = x + 2$ **c.** $y = 2x + 2$

2. Donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

3. Une seule de ces trois propositions est exacte, laquelle ?

3. a. f est convexe sur l'intervalle $]0\,;\,10]$;

3. b. f est concave sur l'intervalle $]0\,;\,10]$;

3. c. f n'est ni convexe ni concave sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.

Réponses

Le corrigé détaillé sur math93.com

Exercice 2. QCM Antilles Septembre 2017

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.
Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier l'affirmation choisie.

1. Des élections doivent se dérouler dans un certain pays. Deux candidats se présentent, le candidat A et le candidat B.

Avant les élections, un organisme de sondage veut estimer la proportion d'électeurs qui voteront pour le candidat A. Pour cela il réalise un sondage auprès d'un échantillon de 1 050 électeurs. Parmi eux, 504 annoncent vouloir voter pour le candidat A et tous les autres pour le candidat B.

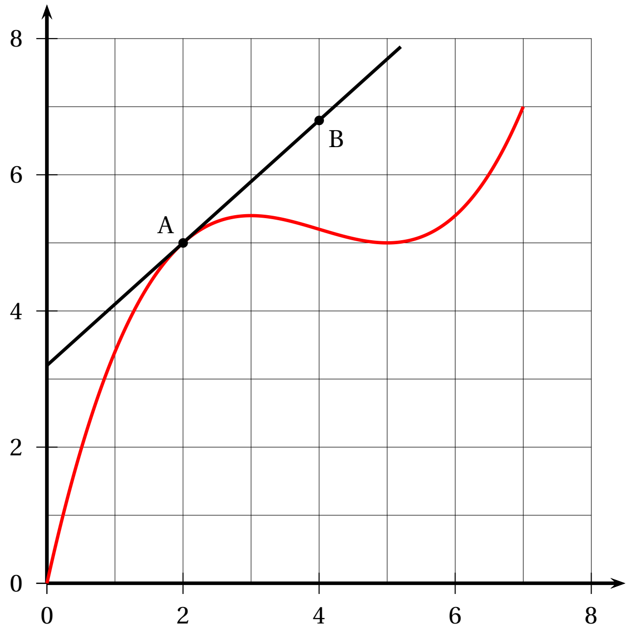
Affirmation 1 : c'est certain, le candidat A va perdre l'élection.

Affirmation 2 : le candidat A aura 48 % des voix le jour de l'élection.

Affirmation 3 : la probabilité que le candidat A obtienne entre 44,91 % et 51,09 % des votes est d'environ 0,48.

Affirmation 4 : la probabilité que le candidat A obtienne entre 44,91 % et 51,09 % des votes est d'environ 0,95.

2. Sur le graphique ci-dessous est représentée la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[0\,;\,7]$. Les points A et B ont pour coordonnées A(2 ; 5) et B(4 ; 6,8). La droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.



2. a. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A admet pour équation :

- **Affirmation 1 :** $y = -0,9x + 3,2$
- **Affirmation 2 :** $y = 0,9x + 3,5$
- **Affirmation 3 :** $y = 0,9x + 3,2$
- **Affirmation 4 :** $y = 1,8x + 3,2$

3. On écrit les deux algorithmes suivants :

Variables :
V est un nombre réel
S est un nombre réel
N est un entier naturel
Traitement :
Affecter la valeur 10 à V
Affecter la valeur 10 à S
Affecter la valeur 0 à N
Tant que $S \leqslant 50$
    V prend la valeur $1,05 \times V$
    S prend la valeur $S + V$
    N prend la valeur $N + 1$
Fin Tant que
Sortie :
Afficher N

algorithme 1

Variables :
V est un nombre réel
S est un nombre réel
K est un nombre réel
Traitement :
Affecter la valeur 10 à V
Affecter la valeur 10 à S
Pour K allant de 1 à 4
    V prend la valeur $1,05 \times V$
    S prend la valeur $S + V$
Fin Pour
Sortie :
Afficher S

algorithme 2

3. a.

- **Affirmation 1 :** l'algorithme 1 affiche en sortie une valeur comprise entre 43 et 44.
- **Affirmation 2 :** l'algorithme 1 affiche en sortie une valeur comprise entre 55 et 56.
- **Affirmation 3 :** l'algorithme 1 affiche en sortie une valeur égale à 3.
- **Affirmation 4 :** l'algorithme 1 affiche en sortie une valeur égale à 4.

3. b.

- **Affirmation 1 :** l'algorithme 2 affiche en sortie une valeur comprise entre 43 et 44.
- **Affirmation 2 :** l'algorithme 2 affiche en sortie une valeur comprise entre 55 et 56.
- **Affirmation 3 :** l'algorithme 2 affiche en sortie une valeur égale à 3.
- **Affirmation 4 :** l'algorithme 2 affiche en sortie une valeur égale à 4.

Réponses

Le corrigé détaillé sur math93.com

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Exercice 3. QCM : Antilles, Juin 2016 (c)

Question 1

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$:

Dans l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet :

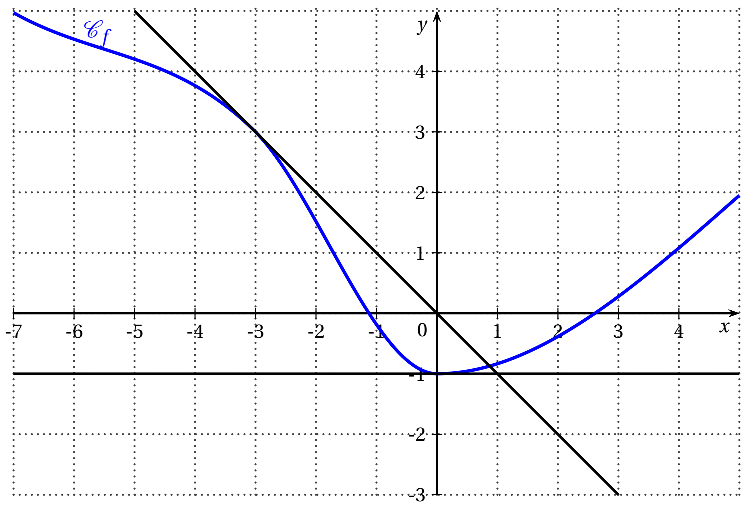
a. exactement 3 solutions
b. exactement 2 solutions
c. exactement 1 solution
d. pas de solution

x	-1	1	2	3
variations de f	-2	2	-1	$-0{,}5$

Exercice 4. QCM : Liban mai 2016 (c)

Question 1

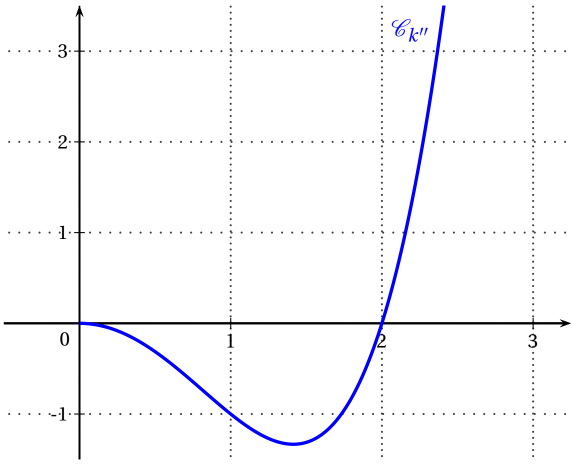
La représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses -3 et 0.



a. $f'(0) = -1$ **b.** $f'(-1) = 0$ **c.** $f'(-3) = -1$ **d.** $f'(-3) = 3$

Question 2

On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde k'' d'une fonction k définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.



a. k est concave sur l'intervalle $[1\,;2]$.

b. k est convexe sur l'intervalle $[0\,;2]$.

c. k est convexe sur $[0\ ;\ +\infty[$.

d. k est concave sur $[0\ ;\ +\infty[$.

D'après bac

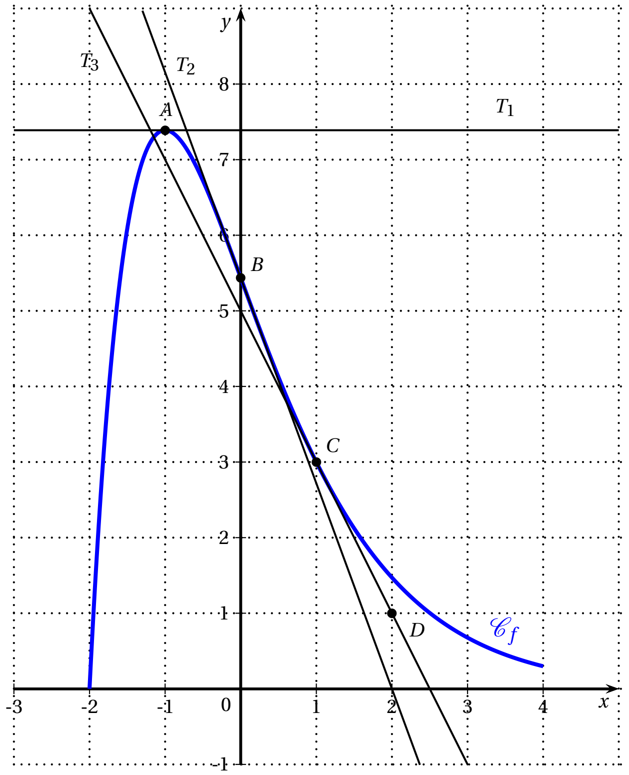
Exercice 5. D'après Bac 2017 (sujet de rattrapage pour copies volées)

Commun à tous les candidats

Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ ainsi que plusieurs tangentes à $\mathscr{C}_f$:

- T_1 est la tangente au point A de coordonnées $\left(-1\,;\,\mathrm{e}^2\right)$,
- T_2 est la tangente au point B de coordonnées $(0\,;\,2\,\mathrm{e})$,
- T_3 est la tangente au point C de coordonnées $(1\,;\,3)$.

On sait que la tangente T_1 est parallèle à l'axe des abscisses et que la tangente T_3 passe par le point D de coordonnées $(2\,;\,1)$.



1. Déterminer $f'(-1)$ et $f'(1)$.

2. On admet que B est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$. Quelle interprétation graphique peut-on faire ?

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point C.

Réponses

Le corrigé détaillé sur www.math93.com

Corrections

Correction de l'exercice 3 : Antilles juin 2016

x	-1	α	1	β	2	3
Variations de f	-2	0	2	0	-1	-0.5

- Sur $[2;3]$.
  Sur l'intervalle $[2;3]$, la fonction f admet $f(3) = -0,5$ comme maximum. De ce fait, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.

- Sur $[1;2]$:
  - La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[1;2]$;
  - On a $k = 0$ compris entre $f(2) = -1$ et $f(1) = 2$;
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
    l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β sur l'intervalle $[1;2]$.
- Sur $[-1;1]$:
  - La fonction f est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[-1;1]$;
  - On a $k = 0$ compris entre $f(-1) = -2$ et $f(1) = 2$;
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
    l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[-1;1]$.

- Bilan : sur l'intervalle $[-1;3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet donc exactement deux solutions.
  La bonne réponse est la réponse b.

Correction de l'exercice 4 : Antilles juin 2016

Question 1 (Réponse c)

a. $f'(0) = -1$ **b.** $f'(-1) = 0$ **c.** $f'(-3) = -1$ **d.** $f'(-3) = 3$

Preuve.

- Au point d'abscisse 0, la tangente est horizontale donc $f'(0) = 0$ ce qui exclu la réponse a.
- Au point d'abscisse -1, la tangente n'est pas horizontale donc $f'(-1) \neq 0$ ce qui exclu la réponse b.
- Au point d'abscisse -3, la tangente est de pente négative donc $f'(-3) < 0$ ce qui exclu la réponse d.
- La seule réponse possible à la question 1 est la réponse c.

Question 2 (Réponse a)

a. k est concave sur l'intervalle $[1;2]$. **b.** k est convexe sur l'intervalle $[0;2]$.
c. k est convexe sur $[0; +\infty[$. **d.** k est concave sur $[0; +\infty[$.

Preuve.
En mathématiques, une fonction réelle d'une variable réelle est dite **convexe** (respectivement **concave**) si son graphe est « tourné vers le haut » ; c'est à dire que si A et B sont deux points du graphe de la fonction, le segment [AB] est entièrement situé au-dessus (respectivement au-dessous) du graphe. De plus on a les propriétés suivantes :

Proposition 1 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus (resp. *au-dessous*) de chacune de ses tangentes ;
- f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa dérivée est croissante (resp. *décroissante*) sur I.

Proposition 2 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
f est convexe si et seulement si **sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles**.
f est concave si et seulement si **sa dérivée seconde f'' est à valeurs négatives ou nulles**.

- Sur l'intervalle $[1\,;\,2]$, la dérivée seconde k'' est négative donc d'après la propriété 2, le fonction k est concave sur cet intervalle. La réponse a est correcte, il n'est pas nécessaire de tester les autres.
  La seule réponse possible à la question 4 est la réponse a.