Math93.com

TD n°1 - Terminale ES/L
La Fonction Exponentielle

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

Propriétés de la fonction exponentielle

Propriété 1 (Propriétés de la fonction exponentielle)

Pour tous réels x et y :

1. $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{y}$ **2.** $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}$ **3.** $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{y}}$ **4.** $\mathrm{e}^{xy} = (\mathrm{e}^{x})^{y}$

Exercice 1. Propriétés de la fonction exponentielle

Simplifier les expressions suivantes pour x réel quelconque en les exprimant sous la forme $\mathrm{e}^{u(x)}$ où u sera un polynôme.

- $A(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-3x}}{(\mathrm{e}^{-x})^2}$
- $B(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{3x}}$
- $C(x) = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2}{\mathrm{e}^{3x+1}}$
- $D(x) = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2 \times \mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{-2x} \times \left(\mathrm{e}^{2x}\right)^2}$

Réponses
$A(x) = e^0 = 1$; $B(x) = e^{-3x}$; $C(x) = e^{3x-1}$; $D(x) = e^{x}$

Exercice 2. Propriétés de la fonction exponentielle

Démontrer, pour tout réel x, les égalités suivantes :

1. $\dfrac{2\,\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ **2.** $\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right)^2 = (1+\mathrm{e}^{x})^2 \times \mathrm{e}^{-2x}$ **3.** $\dfrac{2-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1} = 2 - \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

Équations et inéquations

La résolution d'équations et d'inéquations comportant des termes en e^x ne pourra se faire qu'avec la fonction logarithme.

Propriété 2 (Equation et inéquation)

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tous réels x et y on a :

1. $\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{y} \Longleftrightarrow x = y$ **2.** $\mathrm{e}^{x} < \mathrm{e}^{y} \Longleftrightarrow x < y$

Deux exemples seulement à notre niveau du moment :

$$\mathrm{e}^{x} = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{0} \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e} \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{1} \Longleftrightarrow x = 1$$

Exercice 3. Équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(\mathrm{e}^{x})^2 = \mathrm{e}^{x^2+1}$ **2.** $(1+\mathrm{e}^{x}) \times (2-x^2) = 0$ **3.** $(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{x}) \times \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}} - \mathrm{e}^{x}\right) = 0$

Réponses
$S_1 = \{1\}$; $S_2 = \left\{-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\right\}$; $S_3 = \{0\,;\,1\}$

Exercice 4. Équation et changement de variable

Méthode 1

On cherche à résoudre l'équation :

$$e^{2x} + 2e^{x} - 3 = 0$$

1. On effectue le changement de variable $X = e^{x}$.
   On remarque tout d'abord que :

$$e^{2x} + 2e^{x} - 3 = 0 \Longleftrightarrow \left(e^{x}\right)^2 + 2e^{x} - 3 = 0$$

   On pose alors $X = e^{x}$ et donc :

$$\left(e^{x}\right)^2 + 2e^{x} - 3 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} X = e^{x} \\ X^2 + 2X - 3 = 0 \end{cases}$$

2. On va résoudre l'équation en X.
   L'expression $\left(1X^2 + 2X - 3\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(aX^2 + bX + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 16 > 0$$

   Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(1X^2 + 2X - 3\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2} = -3 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2} = 1$$

3. On en déduit les solutions en x en résolvant les équations $X_1 = e^{x}$ et $X_2 = e^{x}$.

   - On a
     $$X_1 = -3 \Longleftrightarrow e^{x} = -3$$
     N'admet pas de solution car l'exponentielle est toujours strictement positive sur $\mathbb{R}$.
   - On a
     $$X_2 = 1 \Longleftrightarrow e^{x} = 1 = e^{0} \Longleftrightarrow x = 0$$

4. Conclusion : l'équation admet une unique solution $x = 0$.

Suivez le modèle pour résoudre les équations suivantes :

1. $e^{2x} + 4e^{x} = 5$
2. $e^{x}\left(e^{2x} + e^{x} - 2\right) = 0$
3. $\left(e^{x} - e\right)\left(e^{2x} + 3e^{x} + 2\right) = 0$

Réponses
$S_1 = \{0\}$; $S_2 = \{0\}$; $S_3 = \{1\}$

Exercice 5. Inéquation et étude de signe

Méthode 2

Pour étudier le signe ou résoudre une inéquation comportant des termes en e^x on va chercher à factoriser l'expression au maximum en exhibant des facteurs strictement positifs ou positifs. Le fait que l'exponentielle soit strictement positive sur $\mathbb{R}$ est souvent invoqué. L'application principale de cela sera évidemment l'étude du signe de la dérivée ou de la dérivée seconde (pour étudier la convexité).

Par exemple étudions le signe de l'expression A définie sur $[-10;20]$ par :

$$A(x)=\frac{(\mathrm{e}^x+1)\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)}{x^2+1}$$

1. On exhibe les facteurs strictement positifs sur l'intervalle d'étude.
   - La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc à fortiori sur $[-10;20]$ on a : $(\mathrm{e}^x+1)>0$.
   - Sur $[-10;20]$ on a aussi : $x^2\geq 0 \Longrightarrow x^2+1\geq 1>0$.
   - De ce fait $A(x)$ est du signe du facteur $\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)$.
2. Étude du signe de $\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)$.
   On a pour tout réel x de $[-10;20]$:

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)=0 &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{2x}=1\\ &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^0\\ &\Longleftrightarrow 2x=0\\ &\Longleftrightarrow x=0\in[-10;20]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)>0 &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{2x}>1\\ &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{2x}>\mathrm{e}^0\\ &\Longleftrightarrow 2x>0\\ &\Longleftrightarrow x>0 \text{ et } x\in[-10;20]\end{aligned}$$

Conclusion : **Attention**, on se ramène bien à l'ensemble de définition $[-10;20]$ donc :

$$\forall x\in[-10;20]\ :\ \begin{cases}\mathrm{e}^{2x}-1>0 \Longleftrightarrow 0<x\leq 20\\ \mathrm{e}^{2x}-1=0 \Longleftrightarrow x=0\end{cases} \Longrightarrow \mathrm{e}^{2x}-1<0 \Longleftrightarrow -10\leq x<0$$

3. Tableau de signe de $A(x)$.
   On a montré que A était du signe du facteur $(\mathrm{e}^{2x}-1)$ donc :

x	-10		0		20
Signe de $A(x)$		$-$	0	$+$	

4. Applications :
   - Avec $A(x)=f'(x)$: On applique cette méthode si l'expression est la dérivée de f par exemple pour obtenir les variations de f.
   - On peut résoudre l'inéquation $A(x)>0$ ou $A(x)\leq 0$ par exemple :

$$A(x)>0 \Longleftrightarrow x\in]0\,;\,20]$$

1. Résoudre sur l'intervalle $[-10;30]$ l'inéquation :

$$\frac{(x^2+\mathrm{e})(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e})}{(x^2+1)^2}\geq 0$$

2. Étudier sur l'intervalle $[0;30]$ le signe de l'expression :

$$B(x)=\frac{x\,\mathrm{e}^x+(2x-6)\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}}$$

Réponses
$S_1=[-10;-1]$
$B(x)<0 \Longleftrightarrow x\in[0;2[$ *et* $B(x)>0 \Longleftrightarrow x\in]2;30]$

Dérivation et étude de fonctions

Exercice 6. Dérivation ... Un peu de gammes

Théorème 1

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I.

I	f de la forme	Dérivée de f	Notation « abusive »
I	$u \times v$	$u'v + uv'$	$(u \times v)' = u'v + uv'$
I avec v non nul sur I	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
I avec v non nul sur I	$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$
I	u^2	$2u'u$	$\left(u^2\right)' = 2u'u$
I avec u positif non nul sur I	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
I	u^n où $n \in \mathbb{N}^*$	$n\,u'\,u^{n-1}$	$(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$
I	e^u	$u'\,\mathrm{e}^u$	$(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$

Montrer que les dérivées des fonctions suivantes, définies et dérivables sur I, peuvent s'écrire sous cette forme.

$I = \mathbb{R}$	$f_1(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2+1}$	$f_1'(x) = \left(2x^2+1\right)\mathrm{e}^{x^2+1}$
$I = \mathbb{R}$	$f_2(x) = x^2\,\mathrm{e}^{x^3} + \mathrm{e}^{-1}$	$f_2'(x) = \left(3x^4+2x\right)\mathrm{e}^{x^3}$
$I = \mathbb{R}$	$f_3(x) = \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}$	$f_3'(x) = \mathrm{e}^{x}$
$I = \mathbb{R}$	$f_4(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}} + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$	$f_4'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x}$
$I = \mathbb{R}$	$f_5(x) = -\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^{x}$	$f_5'(x) = 2e^x\left(1-e^x\right)$
$I = \mathbb{R}$	$f_6(x) = 1 - \mathrm{e}^{2x} - 2x\,\mathrm{e}^{2x}$	$f_6'(x) = -4e^{2x}(1+x)$

$I = \mathbb{R}$	$f_7(x) = (1+2x)\,\mathrm{e}^{1+2x}$	$f_7'(x) = 4(1+x)\,\mathrm{e}^{1+2x}$
$[1\,;20]$	$f_8(x) = \dfrac{3\,\mathrm{e}^x+2}{x}$	$f_8'(x) = \dfrac{3x\,\mathrm{e}^x - 3\,\mathrm{e}^x - 2}{x^2}$
$I = \mathbb{R}$	$f_9(x) = \dfrac{0{,}01}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$	$f_9'(x) = \dfrac{0{,}02\,\mathrm{e}^{2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)^2}$
$I = \mathbb{R}^*$	$f_{10}(x) = (1-2x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$	$f_{10}'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(-2x^2+2x-1\right)}{x^2}$
$I = \mathbb{R}$	$f_{11}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+2x+1}}{\mathrm{e}^{x^2+x+1}}$	$f_{11}'(x) = \mathrm{e}^{x}$
$I = \mathbb{R}$	$f_{12}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x+1}$	$f_{11}'(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$

Exercice 7. Etude des variations (c)

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $I = [0; 100]$ par :

$$f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-3x+1}$$

Déterminer la dérivée de la fonction f, puis dresser le tableau de variation de f. Vous donnerez dans ce tableau les valeurs exactes de f aux bornes de l'intervalle.

2. On considère la fonction g définie et dérivable sur $J = [1; 50]$ par :

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{1-5x}}{x}$$

Déterminer la dérivée de la fonction g, puis dresser le tableau de variation de g. Vous donnerez dans ce tableau les valeurs exactes de g aux bornes de l'intervalle.

3. On considère la fonction h définie et dérivable sur $[0; 10]$ par :

$$h(x) = x^2\,\mathrm{e}^{1-2x}$$

Déterminer la dérivée de la fonction h, puis dresser le tableau de variation de h. Vous donnerez dans ce tableau les valeurs exactes de h aux bornes de l'intervalle.

Réponses
$f'(x) = (2-6x)\,e^{-3x+1}$; *f croissante sur* $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ *et décroissante sinon.*
$g'(x) = \dfrac{(-5x-1)\,e^{1-5x}}{x^2}$; *g décroissante sur* $[1; 50]$.
$h'(x) = \left(2x - 2x^2\right)\,e^{1-2x}$; *h croissante sur* $[0\,;\,1]$ *et décroissante sur* $[1; 10]$. .

BAC : La fonction exponentielle au Bac

Exercice 8. QCM au Bac (c)

1. **[Métropole juin 2016]**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-2x+3}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' est donnée par :

- **a.** $f'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2x+3}$
- **b.** $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x+3}$
- **c.** $f'(x) = (-2x+3)\,\mathrm{e}^{-2x+3}$
- **d.** $f'(x) = (-2x-1)\,\mathrm{e}^{-2x+3}$

2. **[Polynésie sept 2015]**
La fonction f', dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x}$, a pour expression :

- **a.** $(-x-1)\mathrm{e}^{-x}$
- **b.** $(-2x-3)\mathrm{e}^{-x}$
- **c.** $(2x+3)\mathrm{e}^{-x}$
- **d.** $(-2x+1)\mathrm{e}^{-x}$

3. **[Antilles 2015]**
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-2)\mathrm{e}^{x}$. L'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$:

- **a.** aucune solution
- **b.** une seule solution
- **c.** exactement deux solutions
- **d.** plus de deux solutions

4. **[Antilles sept 2014]**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{5x+2}$.
L'expression $f'(x)$ de la dérivée de f est :

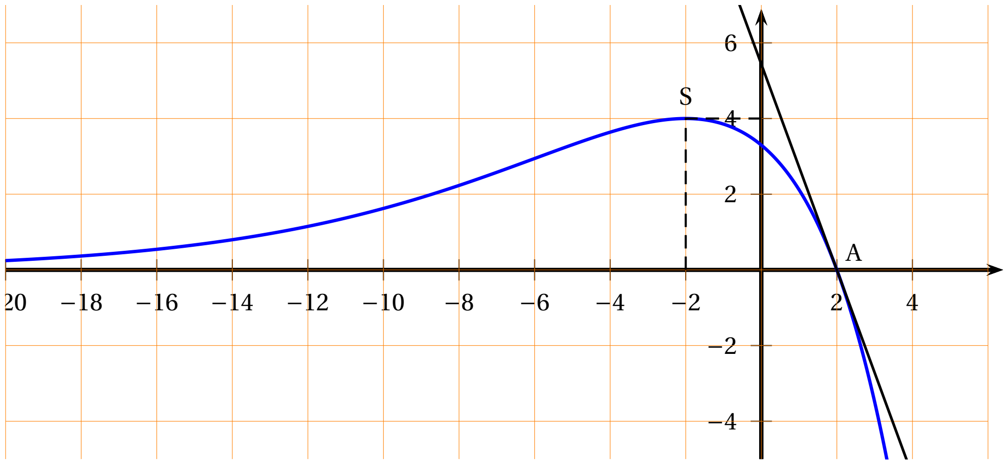
- **a.** $5\mathrm{e}^{5x+2}$
- **b.** e^{5x+2}
- **c.** $2\mathrm{e}^{5x+2}$
- **d.** $(5x+2)\mathrm{e}^{5x+2}$

Exercice 9. QCM au Bac - Polynésie sept 2013

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte, ni n'enlève aucun point.

On a tracé ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et sa tangente au point A d'abscisse 2.



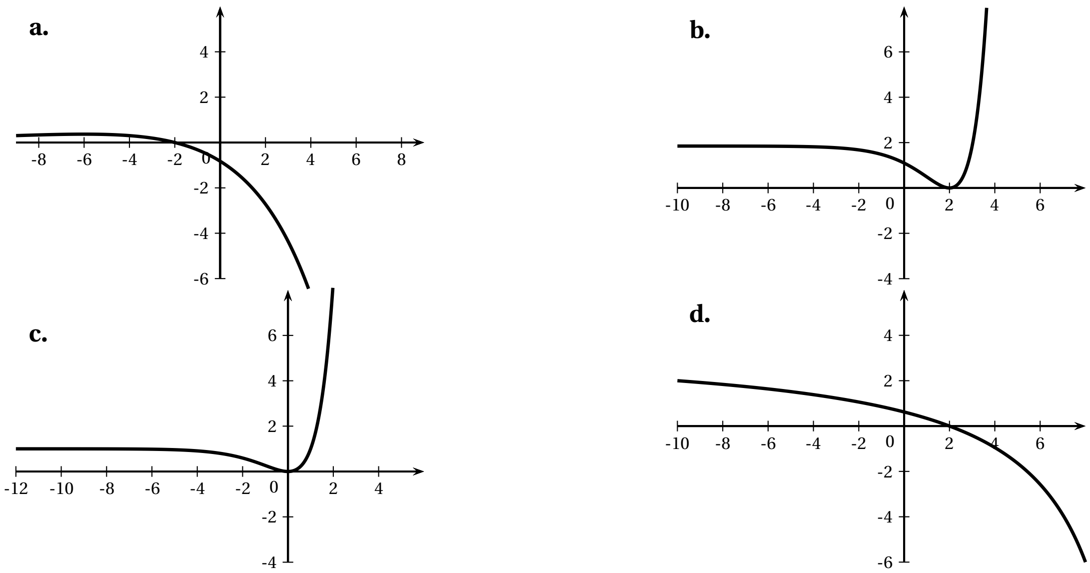
1. Quelle est l'équation de la tangente à C_f en A ?

a. $y = -\mathrm{e}x + 2\mathrm{e}$ **b.** $y = 3x + 2\mathrm{e}$ **c.** $y = \mathrm{e}x + 3\mathrm{e}$ **d.** $y = -5x + 4\mathrm{e}$

2. La fonction f est :

a. concave sur $]-\infty\,;\,0]$ **b.** convexe sur $]-\infty\,;\,0]$ **c.** concave sur $[0\,;\,2]$ **d.** convexe sur $[0\,;\,2]$

3. Parmi les 4 courbes représentées ci-dessous, laquelle représente la fonction dérivée de la fonction f ?



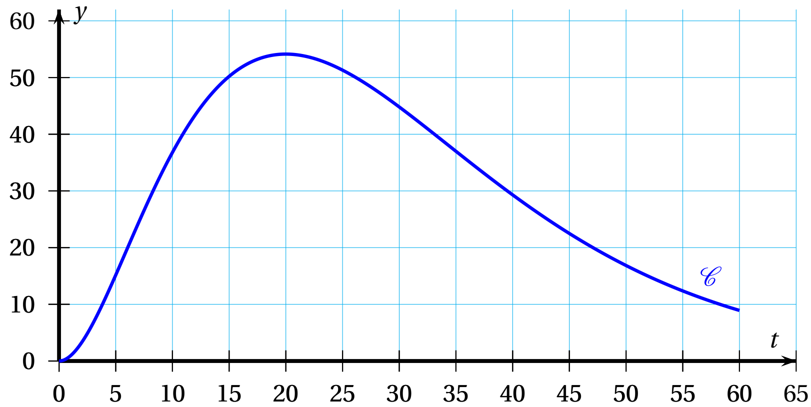
Exercice 10. D'après Bac : Nouvelle Calédonie Mars 2016

Cet exercice est adapté du sujet de Nouvelle Calédonie (Mars 2016). Deux questions relatives aux primitives (non encore abordées) ont été retirées.

Commun à tous les candidats

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente le nombre de personnes malades (en milliers) dans un pays lors d'une épidémie en fonction du nombre t de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.

Partie A



1. À l'aide du graphique, déterminer au bout de combien de jours le nombre de malades est maximal puis préciser le nombre approximatif de malades ce jour-là.

2. Estimer graphiquement le jour où la vitesse de propagation de la maladie est la plus forte. (Expliquer rapidement la démarche)

Partie B

On modélise le nombre de malades (en milliers) en fonction du temps, à l'aide de la fonction f définie sur $[0\,;60]$ par :

$$f(t) = t^2 \mathrm{e}^{-0,1t}$$

où t représente le nombre de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.
Pour étudier les propriétés de la fonction f, on a utilisé un logiciel de calcul formel qui a fourni les résultats suivants :

- $f'(t) = 0,1t(20-t)\mathrm{e}^{-0,1t}$
- $f''(t) = \left(0,01t^2 - 0,4t + 2\right)\mathrm{e}^{-0,1t}$

où f' désigne la dérivée de f et f'' désigne sa dérivée seconde.

1. Démontrer le résultat : $f'(t) = 0,1t(20-t)\mathrm{e}^{-0,1t}$ qui a été fourni par le logiciel.

2.

2. a. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;60]$.

2. b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;60]$.

3.

3. a. Justifier par le calcul que, sur l'intervalle $[0\,;15]$, la courbe représentative de la fonction f admet un unique point d'inflexion.
Préciser une valeur arrondie à l'unité de l'abscisse de ce point d'inflexion.

3. b. Donner une interprétation concrète de cette abscisse.

Correction

Correction de l'exercice 7

1. On a :

$$f : \begin{cases} [0;100] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-3x+1} \end{cases}$$

- Calcul de la dérivée.
  La fonction f est dérivable sur $[0;100]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
  La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0;100]\ ;\ f(x) = u(x) \times v(x)\ :\ \begin{cases} u(x) = 2x & ; \quad u'(x) = 2 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-3x+1} & ; \quad v'(x) = \left(-3\,\mathrm{e}^{-3x+1}\right) \end{cases}$$

  On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0;100],\ f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) &= 2 \times \mathrm{e}^{-3x+1} + 2x \times \left(-3\,\mathrm{e}^{-3x+1}\right) \end{aligned}$$

  Soit

$$\boxed{\forall x \in [0;100]\ ;\ f'(x) = (2-6x)\,\mathrm{e}^{-3x+1}}$$

- Étude du signe de la dérivée.
  La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. La dérivée est donc du signe du facteur $(2-6x)$ sur $[0;100]$ soit puisque :

$$2 - 6x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

x	0		$\frac{1}{3}$		100
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$	$\searrow$	$200\,\mathrm{e}^{-299}$

2. On a :

$$g : \begin{cases} [1;50] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{1-5x}}{x} \end{cases}$$

- Calcul de la dérivée.
  La fonction g est dérivable sur $[1\ ;\ 50]$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle.
  La fonction g est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :

$$\forall x \in [1\ ;\ 50]\ ;\ g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}\ :\ \begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{1-5x} & ; \quad u'(x) = -5\,\mathrm{e}^{1-5x} \\ v(x) = x & ; \quad v'(x) = 1 \end{cases}$$

  On a donc :

$$\forall x \in [1\ ;\ 50],\ g'(x) = \frac{-5\,\mathrm{e}^{1-5x} \times x - \mathrm{e}^{1-5x} \times 1}{x^2}$$

$$\boxed{\forall x \in [1\ ;\ 50],\ g'(x) = \frac{(-5x-1)\,\mathrm{e}^{1-5x}}{x^2}}$$

- Étude du signe de la dérivée.
  La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et le dénominateur x^2 est strictement positif sur $[1;50]$. La dérivée est donc du signe du facteur $(-5x-1)$ sur $[1;50]$ soit puisque :

$$-5x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{-1}{5}$$

x	1		$\frac{-1}{5}$		50
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de g	e^{-4}	$\nearrow$	$g\left(\frac{-1}{5}\right)=-5e^{2}$	$\searrow$	$\frac{e^{-249}}{50}$

3. On a :

$$h : \begin{cases} [1\,;10] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \quad h(x)=x^2\ e^{1-2x} \end{cases}$$

- Calcul de la dérivée.
  La fonction h est dérivable sur $[1\,;10]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
  La fonction h est de la forme uv donc de dérivée $u'v+uv'$ avec :

$$\forall x\in[1\,;10]\ ;\ h(x)=u(x)\times v(x)\ :\ \begin{cases} u(x)=x^2 & ;\quad u'(x)=2x \\ v(x)=e^{1-2x} & ;\quad v'(x)=\left(-2e^{1-2x}\right) \end{cases}$$

  On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x\in[1\,;10],\ h'(x)&=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x) \\ h'(x)&=2x\times e^{1-2x}+x^2\times\left(-2e^{1-2x}\right) \end{aligned}$$

  Soit

$$\boxed{\forall x\in[1\,;10]\ ;\ h'(x)=\left(2x-2x^2\right)\ e^{1-2x}}$$

- Étude du signe de la dérivée.
  La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. La dérivée est donc du signe du facteur $\left(2x-2x^2\right)$ sur $[1\,;10]$. La fonction $x\longmapsto\left(2x-2x^2\right)=2x(1-x)$ est une fonction polynôme du second degré dont les racines sont 0 et 1. Elle est donc du signe du coefficient de x^2 qui est $-2<0$ soit négative à l'extérieur des racines et positive ailleurs. La fonction dérivée est donc négative sur $[1\,;10]$ et on obtient alors :

x	1		10
Signe de $h'(x)$	0	$-$	
Variation de h	e^{-1}	$\searrow$	$100e^{-19}$

Correction de l'exercice 8 : QCM au Bac

1. **[Métropole juin 2016]** : f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)e^{-2x+3}$.

a. $f'(x)=-2e^{-2x+3}$ **b.** $f'(x)=e^{-2x+3}$ **c.** $f'(x)=(-2x+3)e^{-2x+3}$ $\boxed{\textbf{d. } f'(x)=(-2x-1)e^{-2x+3}}$

2. **[Polynésie sept 2015]** : La fonction f', dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x+1)e^{-x}$, a pour expression :

a. $(-x-1)e^{-x}$ **b.** $(-2x-3)e^{-x}$ **c.** $(2x+3)e^{-x}$ $\boxed{\textbf{d. } (-2x+1)e^{-x}}$

3. **[Antilles 2015]** : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x-2)e^x$. L'équation $g(x)=0$ admet sur $\mathbb{R}$:

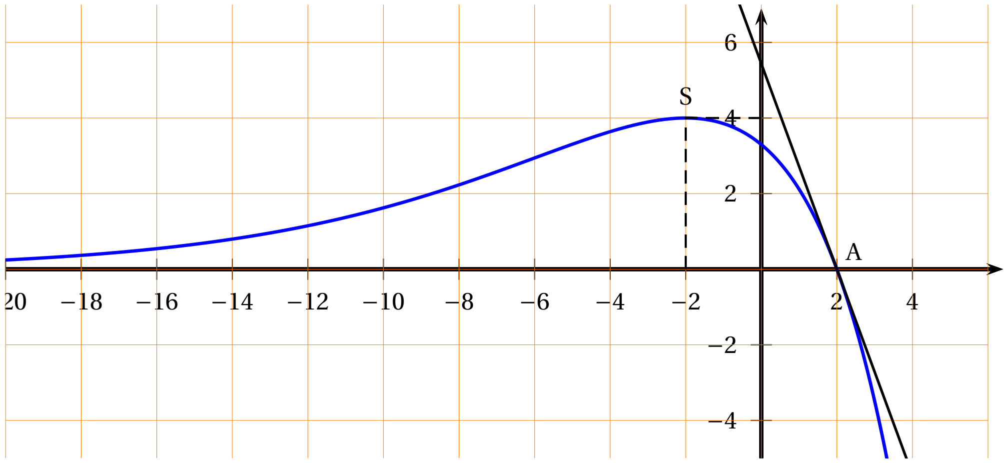
a. aucune solution $\boxed{\textbf{b. } \text{une seule solution}}$ **c.** exactement deux **d.** plus de deux solutions

4. **[Antilles sept 2014]** : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{5x+2}$. L'expression $f'(x)$ de la dérivée de f est :

$\boxed{\textbf{a. } 5e^{5x+2}}$ **b.** e^{5x+2} **c.** $2e^{5x+2}$ **d.** $(5x+2)e^{5x+2}$

Correction de l'exercice 9 QCM au Bac - Polynésie sept 2013

On a tracé ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et sa tangente au point A d'abscisse 2.



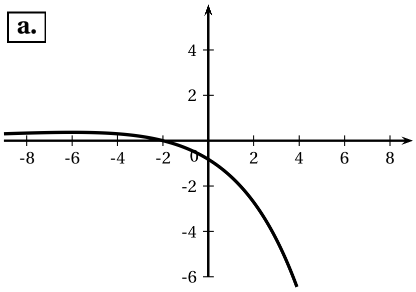
1. Quelle est l'équation de la tangente à C_f en A ?

$\boxed{\textbf{a. } y = -\mathrm{e}x + 2\mathrm{e}}$ **b.** $y = 3x + 2\mathrm{e}$ **c.** $y = \mathrm{e}x + 3\mathrm{e}$ **d.** $y = -5x + 4\mathrm{e}$

2. La fonction f est :

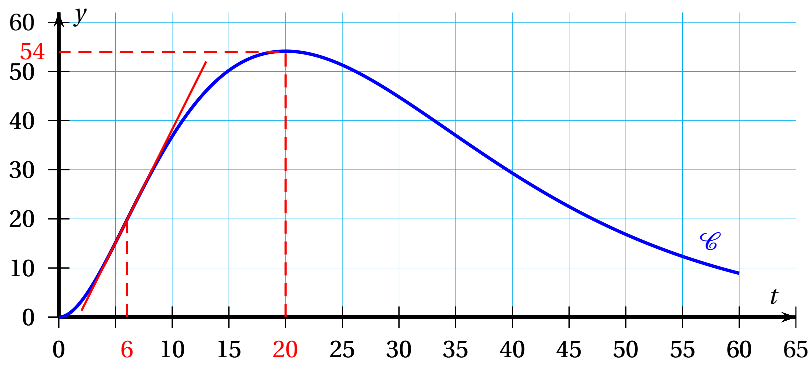
a. concave sur $]-\infty\,;\,0]$ **b.** convexe sur $]-\infty\,;\,0]$ $\boxed{\textbf{c. } \text{concave sur } [0\,;\,2]}$ **d.** convexe sur $[0\,;\,2]$

3. Parmi les 4 courbes représentées ci-dessous, laquelle représente la fonction dérivée de la fonction f ?



Correction de l'exercice 10 - Nouvelle Calédonie Mars 2016

Partie A



1. **À l'aide du graphique, déterminer au bout de combien de jours le nombre de malades est maximal puis préciser le nombre approximatif de malades ce jour-là.**
 On peut estimer que le nombre de malades est maximal au bout de 20 jours ; le nombre approximatif de malades est de 54 milliers.

2. **Estimer graphiquement le jour où la vitesse de propagation de la maladie est la plus forte. (Expliquer rapidement la démarche utilisée)**.
 La vitesse de propagation est la plus forte quand le coefficient directeur de la tangente à la courbe est le plus grand.
 C'est autour du 6ᵉ jour.

Partie B

On modélise le nombre de malades (en milliers) en fonction du temps, à l'aide de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;60]$ par : $f(t) = t^2 e^{-0,1t}$ où t représente le nombre de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie. Pour étudier les propriétés de la fonction f, on a utilisé un logiciel de calcul formel qui a fourni les résultats suivants :

- $f'(t) = 0,1t(20-t)\mathrm{e}^{-0,1t}$
- $f''(t) = \left(0,01t^2 - 0,4t + 2\right)\mathrm{e}^{-0,1t}$

1. **Démontrer le résultat : $f'(t) = 0,1t(20-t)\mathrm{e}^{-0,1t}$ qui a été fourni par le logiciel.**

$$f : \left\{\begin{array}{ccl} [0\,;60] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = t^2 \times \mathrm{e}^{-0,1t} \end{array}\right.$$

La fonction f est dérivable sur $[0;60]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall t \in [0;60]\ ;\ f(x) = u(x) \times v(x) + 2\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} u(x) = t^2 & ; & u'(x) = 2t \\ v(x) = \mathrm{e}^{-0,1t} & ; & v'(x) = -0,1\,\mathrm{e}^{-0,1t} \end{array}\right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0;60],\ f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) &= 2t \times \mathrm{e}^{-0,1t} + t^2 \times \left(-0,1\,\mathrm{e}^{-0,1t}\right) \\ f'(t) &= \mathrm{e}^{-0,1t}\left(2t - 0,1t^2\right) \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall t \in [0;60]\ ;\ f'(t) = 0,1t\,(20-t)\,\mathrm{e}^{-0,1t}}$$

2.

2. a. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;60]$.

$$\forall t \in [0;60]\ ;\ f'(t) = 0,1t\,(20-t)\,\mathrm{e}^{-0,1t}$$

Or :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}\ :\ \mathrm{e}^{-0,1t} > 0 \\ \forall x \in [0;60]\ :\ 0,1t \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Donc $f'(t)$ est du signe du facteur $(20-t)$ donc positif avant 20 et négatif après. On a facilement par ailleurs :

$$f'(t)=0 \Longleftrightarrow \left(t=0\right) \text{ ou } \left(t=20\right)$$

En conséquence :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f'(t)>0 \Longleftrightarrow t\in\left]0\,;20\right[\\ f'(t)=0 \Longleftrightarrow \left(t=0\right) \text{ ou } \left(t=20\right)\end{array}\right\} \Longrightarrow \; f'(t)<0 \Longleftrightarrow t\in\left]20\,;60\right]}$$

2. b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;60]$.

$$f(0)=0\;;\; f(20)=400\,\mathrm{e}^{-2}\approx 54,13 \text{ et } f(60)=3600\,\mathrm{e}^{-6}\approx 8,92$$

Le tableau de variation de la fonction f sur $[0;60]$ est :

x	0		20		60
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$400\,\mathrm{e}^{-2}$	↘	$3600\,\mathrm{e}^{-6}$

3. 3. a. Justifier par le calcul que, sur l'intervalle $[0\,;15]$, la courbe représentative de la fonction f admet un unique point d'inflexion. Préciser une valeur arrondie à l'unité de l'abscisse de ce point d'inflexion

La courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion d'abscisse t_0 si la dérivée seconde f'' s'annule et change de signe en t_0.

$$\begin{aligned} f''(t)=0 &\Longleftrightarrow \left(0,01t^2-0,4t+2\right)\mathrm{e}^{-0,1t}=0\\ &\Longleftrightarrow 0,01t^2-0,4t+2=0\\ &\Longleftrightarrow t^2-40t+200=0\end{aligned}$$

On obtient une équation du second degré en t de la forme $at^2+bt+c=0$ avec $a=1$; $b=-40$; $c=200$. On a alors

$$\Delta=40^2-4\times1\times200=800>0$$

Donc l'équation admet deux solutions :

$$t_2=\frac{40+\sqrt{800}}{2}=\frac{40+20\sqrt{2}}{2}=20+10\sqrt{2}\approx 34,14>15 \text{ et } t_1=20-10\sqrt{2}\approx 5,85<15$$

On étudie le signe de $f''(t)$ sur $[0;15]$:

x	0		$t_1=20-10\sqrt{2}$		15
Signe de $f''(x)$		+	0	−	

La fonction f'' s'annule en changeant de signe en t_1. C'est le seul point d'inflexion de la fonction f sur l'intervalle $[0;15]$.
La courbe $\mathscr{C}$ admet donc un seul point d'inflexion d'abscisse $\underline{20-10\sqrt{2}\approx 5,85 \text{ soit 6 arrondi à l'unité}}$.

3. b. Donner une interprétation concrète de cette abscisse.

Un point d'inflexion correspond à un changement de convexité de la courbe.

- Pour tout t de l'intervalle $\left[0;20-10\sqrt{2}\right[$ on a : $f''(t)>0$, donc la fonction f est convexe sur $\left[0;20-10\sqrt{2}\right[$.
- Pour tout t de l'intervalle $\left]20-10\sqrt{2};15\right]$ on a : $f''(t)<0$, donc la fonction f est concave sur $\left]20-10\sqrt{2};15\right]$.

Cette abscisse du point d'inflexion correspond donc au moment où la fonction passe de convexe à concave, ce qui signifie que la propagation de la maladie commence à décroitre.