



Math93.com

# TD n°2 - Terminale ES/L

## La Fonction Exponentielle au Bac

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD. Les autres proposent une correction détaillée sur le site [www.math93.com](http://www.math93.com)

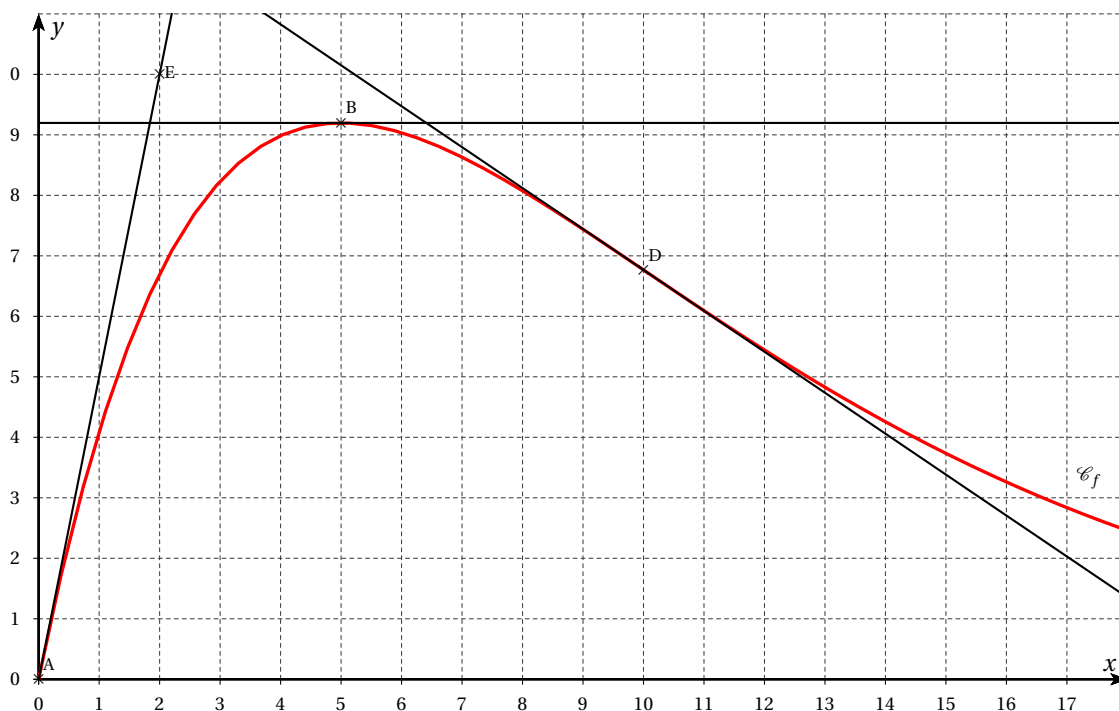
### La fonction exponentielle au Bac

#### Exercice 1. D'après Amérique du Nord - Juin 2015 (c)

##### Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[0 ; 18]$  ainsi que les tangentes au point A d'abscisse 0, au point B d'abscisse 5 et au point D d'abscisse 10.

On sait aussi que la tangente au point A passe par le point E de coordonnées (2 ; 10) et que la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Donner les valeurs de  $f'(5)$  et de  $f'(0)$ .
2. On admet que D est un point d'inflexion. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

##### Partie B

Une entreprise s'apprête à lancer sur le marché français un nouveau jouet destiné aux écoliers. Les ventes espérées ont été modélisées par la fonction  $f$  dont la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  a été tracée ci-dessus. En abscisses,  $x$  représente le nombre de jours écoulés depuis le début de la campagne publicitaire. En ordonnées,  $f(x)$  représente le nombre de milliers de jouets vendus le  $x$ -ième jour. Ainsi, par exemple, le 10-ième jour après le début de la campagne publicitaire, l'entreprise prévoit de vendre environ 6 800 jouets. On admet que la fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[0 ; 18]$  par  $f(x) = 5xe^{-0,2x}$ .

1. Montrer que  $f'(x) = (5 - x)e^{-0,2x}$  où  $f'$  désigne la fonction dérivée de  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 18]$ .
2. Étudier le signe de  $f'(x)$  sur  $[0 ; 18]$  puis dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0 ; 18]$ .
3. Déterminer le nombre de jours au bout duquel le maximum de ventes par jour est atteint. Préciser la valeur de ce maximum, arrondie à l'unité.

**Partie C**

1. Un logiciel de calcul formel nous donne les résultats suivants :

1	dériver $[(5 - x) * \exp(-0.2 * x)]$
	$-\exp(-0.2 * x) - \frac{1}{5} * \exp(-0.2 * x) * (-x + 5)$
2	Factoriser $[-\exp(-0.2 * x) - \frac{1}{5} * \exp(-0.2 * x) * (-x + 5)]$
	$\frac{x - 10}{5} * \exp(-0.2 * x)$

Utiliser ces résultats pour déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction  $f$  est convexe.

**Exercice 2. Pondichéry Avril 2015**

**4 points**

On s'intéresse à la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = -2(x+2)e^{-x}.$$

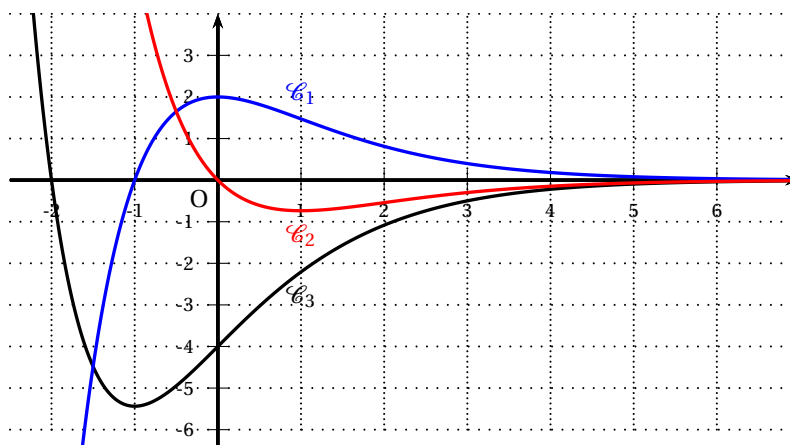
**Partie A**

1. Calculer  $f(-1)$  et en donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.
2. Justifier que  $f'(x) = 2(x+1)e^{-x}$  où  $f'$  est la fonction dérivée de  $f$ .
3. En déduire les variations de la fonction  $f$ .

**Partie B**

Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$  ont été représentées. L'une de ces courbes représente la fonction  $f$ , une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.

Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction  $f$ . Indiquer un intervalle sur lequel la fonction  $f$  est convexe.



**Réponses**

- A.3.  $f$  décroissante sur  $]-\infty; -1]$  et croissante sur  $[-1; +\infty[$
  - B.  $f$  est convexe sur  $]-\infty; 0]$ .
- Voir la correction détaillée sur [www.math93.com](http://www.math93.com)

**Exercice 3. D'après Liban 31 mai 2016****6 points**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[3; 13]$  par :

$$f(x) = -2x + 20 - e^{-2x+10}.$$

**Partie A : Étude de la fonction  $f$** 

1. Montrer que la fonction dérivée  $f'$ , de la fonction  $f$ , définie pour tout  $x$  de l'intervalle  $[3; 13]$ , a pour expression :

$$f'(x) = 2(-1 + e^{-2x+10}).$$

2. **2. a.** Résoudre dans l'intervalle  $[3; 13]$  l'inéquation :  $f'(x) \geq 0$ .

**2. b.** En déduire le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $[3; 13]$  et dresser le tableau de variations de  $f$  sur cet intervalle. Les valeurs du tableau seront, si besoin, arrondies à  $10^{-3}$ .

**Partie B : Application**

Une usine fabrique et commercialise des toboggans. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 300 et 1 300. On suppose que toute la production est commercialisée.

Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de  $x$  centaines de toboggans est modélisé sur l'intervalle  $[3; 13]$  par la fonction  $f$ .

En utilisant la partie A, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal et donner ce bénéfice, arrondi à l'euro.

**Partie C : Rentabilité (EPI)**

Remarque : cette question est de type EPI, Exercice à Prise d'Initiative.

Pour être rentable, l'usine doit avoir un bénéfice positif.

Déterminer le nombre minimum et le nombre maximum de toboggans que l'usine doit fabriquer en un mois pour qu'elle soit rentable. Justifier la réponse.

**Réponses**

Voir la correction détaillée (exercice 4 du sujet) sur [www.math93.com](http://www.math93.com)

**Exercice 4. Asie 17 Juin 2015 (c)****7 points****Partie A**Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 10]$  par

$$f(x) = x + e^{-x+1}.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	$f(x) := x + \exp(-x + 1)$
	// Interprète $f$ // Succès lors de la compilation $f$
	$x \mapsto x + \exp(-x + 1)$
2	derive ( $f(x)$ )
	$-\exp(-x + 1) + 1$
3	solve ( $-\exp(-x + 1) + 1 > 0$ )
	$[x > 1]$
4	derive ( $-\exp(-x + 1) + 1$ )
	$\exp(-x + 1)$

**1. Étude des variations de la fonction  $f$** 

- 1. a.** En s'appuyant sur les résultats ci-dessus, déterminer les variations de la fonction  $f$  puis dresser son tableau de variation.
  - 1. b.** En déduire que la fonction  $f$  admet un minimum dont on précisera la valeur.
- 2.** Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 10]$ .

**Partie B**

Une entreprise fabrique des objets. Sa capacité de production est limitée, compte tenu de l'outil de production utilisé, à mille objets par semaine.

Le coût de revient est modélisé par la fonction  $f$  où  $x$  est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets et  $f(x)$  le coût de revient exprimé en milliers d'euros.

- 1.** Quel nombre d'objets faut-il produire pour que le coût de revient soit minimum ?
- 2.** Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12 €. On appelle marge brute pour  $x$  centaines d'objets, la différence entre le montant obtenu par la vente de ces objets et leur coût de revient.
  - 2. a.** Justifier que le montant obtenu par la vente de  $x$  centaines d'objets est  $1,2x$  milliers d'euros.
  - 2. b.** Montrer que la marge brute pour  $x$  centaines d'objets, notée  $g(x)$ , en milliers d'euros, est donnée par :
 
$$g(x) = 0,2x - e^{-x+1}$$
  - 2. c.** Montrer que la fonction  $g$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; 10]$ .
- 3. 3. a.** Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  possède une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0; 10]$ .
  - 3. b.** Déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $0,01$ .
- 4.** En déduire la quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise une marge brute positive sur la vente de ces objets.

**Exercice 5. Pondichéry Avril 2016**

**6 points**

**La partie A peut être traitée indépendamment des parties B et C.**

L'entreprise BBE (Bio Bois Énergie) fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez des particuliers ou dans des collectivités. L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

- Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction  $C$  définie sur l'intervalle  $[1; 15]$  par :

$$C(x) = 0,3x^2 - x + e^{-x+5}$$

où  $x$  désigne la quantité de granulés en tonnes et  $C(x)$  le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.

- Dans l'entreprise BBE le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros. La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction  $R$  définie sur l'intervalle  $[1; 15]$  par :

$$R(x) = 3x$$

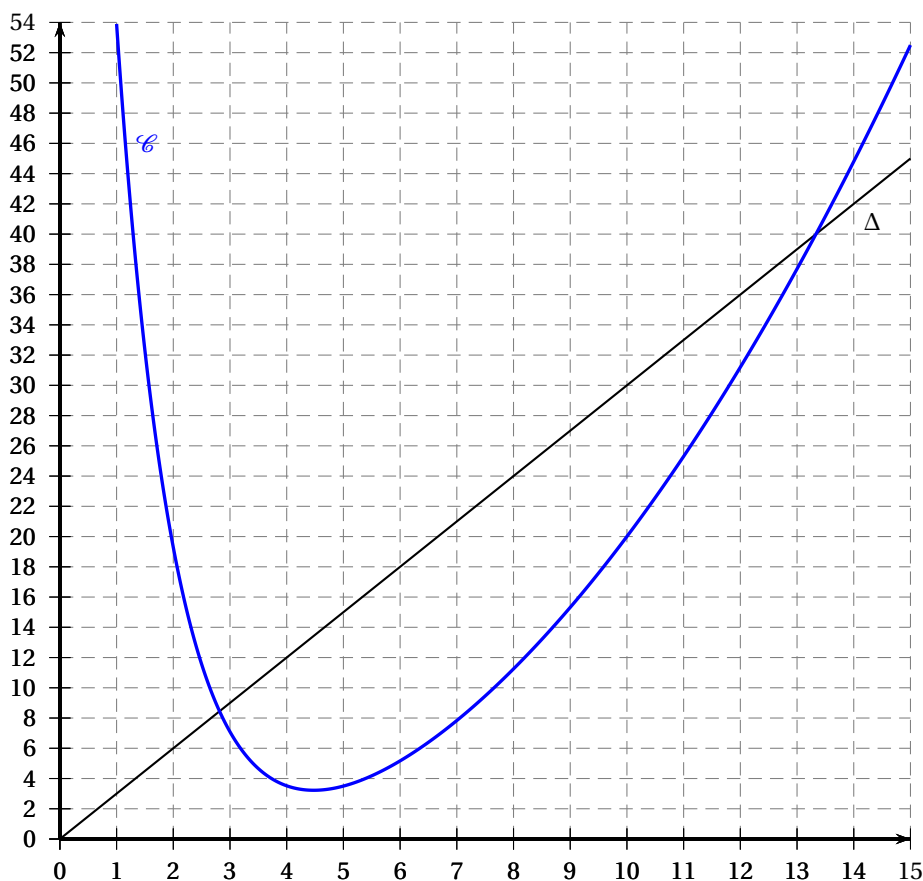
où  $x$  désigne la quantité de granulés en tonnes et  $R(x)$  la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.

- On définit par  $D(x)$  le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette  $R(x)$  et le coût  $C(x)$ , où  $x$  désigne la quantité de granulés en tonnes.

**Partie A : Étude graphique**

Sur le graphique ci-dessous, on donne  $\mathcal{C}$  et  $\Delta$  les représentations graphiques respectives des fonctions  $C$  et  $R$  dans un repère d'origine  $O$ . **Dans cette partie A, répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique, et avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.**

- Déterminer la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal.
- Déterminer les valeurs  $C(6)$  et  $R(6)$  puis en déduire une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus.
  - Déterminer les quantités possibles de granulés en tonnes que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est-à-dire un bénéfice.



**Partie B : Étude d'une fonction**

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[1 ; 15]$  par :

$$g(x) = -0,6x + 4 + e^{-x+5}$$

On admet que la fonction  $g$  est dérivable sur l'intervalle  $[1 ; 15]$  et on note  $g'$  sa fonction dérivée.

1. **1. a.** Calculer  $g'(x)$  pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[1 ; 15]$ .
1. **b.** En déduire que la fonction  $g$  est décroissante sur l'intervalle  $[1 ; 15]$ .
2. **2. a.** Dresser le tableau de variation de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[1 ; 15]$ , en précisant les valeurs  $g(1)$  et  $g(15)$  arrondies à l'unité.
2. **b.** Le tableau de variation permet d'affirmer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $[1 ; 15]$ .  
Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à 0,1 près.
2. **c.** Déduire des questions précédentes le tableau de signe de  $g(x)$  sur l'intervalle  $[1 ; 15]$ .

**Partie C : Application économique**

1. Démontrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[1 ; 15]$ , on a :

$$D(x) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}$$

2. On admet que la fonction  $D$  est dérivable sur l'intervalle  $[1 ; 15]$  et on note  $D'$  sa fonction dérivée.  
Démontrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[1 ; 15]$ , on a  $D'(x) = g(x)$ , où  $g$  est la fonction étudiée dans la partie B.
3. En déduire les variations de la fonction  $D$  sur l'intervalle  $[1 ; 15]$ .
4. **4. a.** Pour quelle quantité de granulés l'entreprise va-t-elle rendre son bénéfice maximal ?  
On donnera une valeur approchée du résultat à 0,1 tonne près.
4. **b.** Calculer alors le bénéfice maximal à l'euro près.

**Réponses**

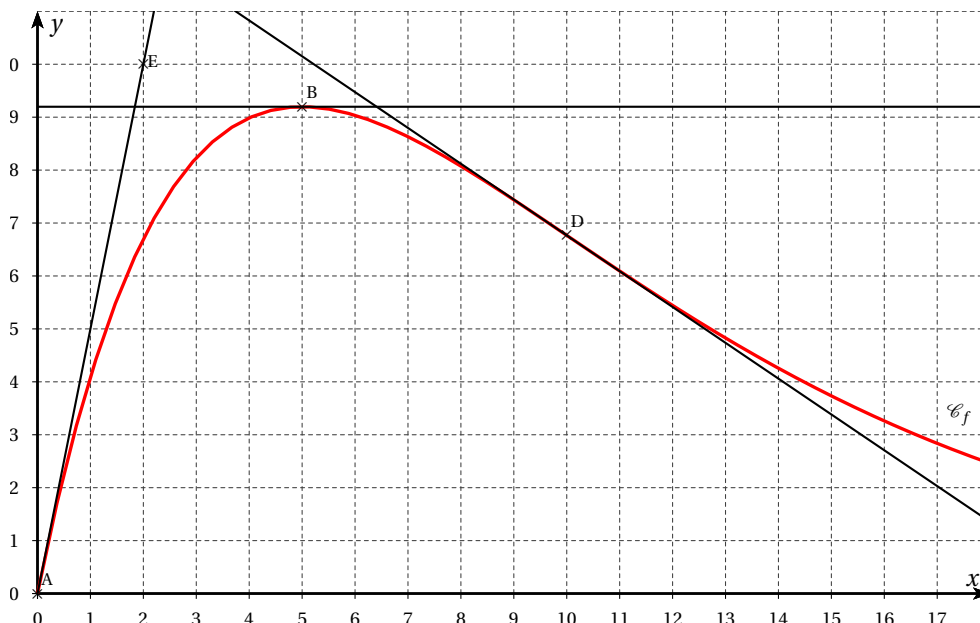
Voir la correction détaillée (exercice 2) sur [www.math93.com](http://www.math93.com)

# Correction

## Corrigé de l'exercice 1 : Amérique du Nord - Juin 2015

### Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[0 ; 18]$  ainsi que les tangentes au point A d'abscisse 0, au point B d'abscisse 5 et au point D d'abscisse 10. On sait aussi que la tangente au point A passe par le point E de coordonnées (2 ; 10) et que la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

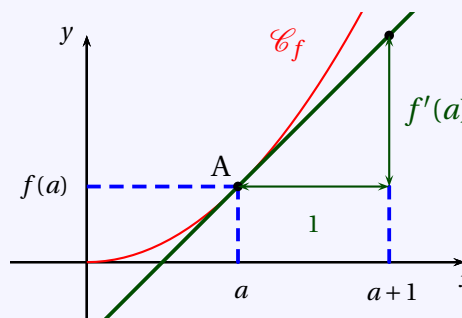


1. Donner les valeurs de  $f'(5)$  et de  $f'(0)$ .

#### Propriété 1 (Tangente à $\mathcal{C}_f$ en A)

Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors, la **tangente** à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point A d'abscisse  $a$  est la droite qui passe par A et qui a pour coefficient directeur  $f'(a)$ .  
Son équation est donnée par :

$$T : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



• **En 0**

La tangente ( $T_A$ ) à la courbe  $\mathcal{C}$  au point A(0 ; 0) passe aussi par le point E(2 ; 10).

Par définition, le coefficient directeur de cette droite est le nombre dérivé de  $f$  en 0 soit :

$$f'(0) = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{10 - 0}{2 - 0}$$

Soit

$$f'(0) = \frac{10}{2} = 5$$

• **En 5**

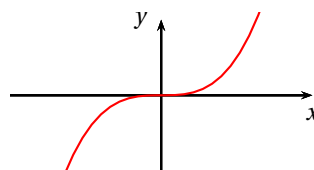
La tangente ( $T_B$ ) à la courbe  $\mathcal{C}$  au point B(5 ;  $f(5)$ ) est parallèle à l'axe des abscisses donc de coefficient directeur 0. Par définition, le coefficient directeur (ici nul) de cette droite est le nombre dérivé de  $f$  en 5 soit :

$$f'(5) = 0$$

2. On admet que D est un point d'inflexion. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

**Définition 1** (Point d'inflexion d'une fonction numérique)

- Si, en un point de la courbe représentative d'une fonction continue, la concavité passe du type « convexe » au type « concave » (ou l'inverse), on appelle ce point, **point d'inflexion de la courbe**.
- Graphiquement, un point d'inflexion est un point où la tangente coupe la courbe.
- En un point d'inflexion, **la dérivée seconde, si elle existe, s'annule et change de signe**.



Représentation graphique de la fonction

$$x \mapsto x^3$$

montrant un point d'inflexion aux coordonnées (0,0).

**Partie B**

En abscisses,  $x$  représente le nombre de jours écoulés depuis le début de la campagne publicitaire. En ordonnées,  $f(x)$  représente le nombre de milliers de jouets vendus le  $x$ -ième jour. Ainsi, par exemple, le 10-ième jour après le début de la campagne publicitaire, l'entreprise prévoit de vendre environ 6 800 jouets.

On admet que la fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[0 ; 18]$  par  $f(x) = 5x e^{-0,2x}$ .

1. Montrer que  $f'(x) = (5 - x) e^{-0,2x}$  où  $f'$  désigne la fonction dérivée de  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 18]$ .

$$f : \begin{cases} [0 ; 18] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) = 5x \times e^{-0,2x} \end{cases}$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0 ; 18]$  comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

La fonction  $f$  est de la forme  $uv$  donc de dérivée  $u'v + uv'$  avec :

$$\forall x \in [0 ; 18] ; f(x) = u(x) \times v(x) : \begin{cases} u(x) = 5x & ; u'(x) = 5 \\ v(x) = e^{-0,2x} & ; v'(x) = (-0,2 e^{-0,2x}) \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0 ; 18], f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) &= 5 \times e^{-0,2x} + 5x \times (-0,2 e^{-0,2x}) \\ f'(x) &= (5 - x) \times e^{-0,2x} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0 ; 18] ; f'(x) = (5 - x) e^{-0,2x}}$$

2. Étudier le signe de  $f'(x)$  sur  $[0 ; 18]$  puis dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0 ; 18]$ .

La fonction dérivée s'exprime ici comme un produit de deux facteurs. Pour tout réel  $x$ , le facteur  $e^{-0,2x}$  est strictement positif donc le signe de  $f'(x)$  dépend uniquement de celui de  $(5 - x)$  dont l'étude est triviale.

$$\forall x \in [0 ; 18] ; \left. \begin{cases} 5 - x > 0 \iff 5 > x \geq 0 \\ 5 - x = 0 \iff x = 5 \end{cases} \right\} \implies 5 - x < 0 \iff 5 < x \leq 18$$

De fait  $f'(x)$  est nul en  $x = 5$ , positif sur  $]0 ; 5[$  et négatif sur  $]5 ; 18[$ .

$$f : \begin{cases} [0; 18] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = 5x \times e^{-0,2x} \end{cases}$$

On va alors dresser le tableau de variations de  $f$  après avoir calculé les valeurs aux bornes :

$x$	0	5	18
$f(x)$	$f(0) = 0$	$f(5) = 25e^{-1} \approx 9,2$	$f(18) = 90e^{-3,6} \approx 2,46$

$x$	0	5	18	
$f'(x)$		+	0	-
Variations de $f$		$f(5) \approx 9.2$		
	0	↗	↘	$f(18) \approx 2.46$

**3. Déterminer le nombre de jours au bout duquel le maximum de ventes par jour est atteint. Préciser la valeur de ce maximum, arrondie à l'unité.**

Le maximum est atteint au bout de 5 jours et on a :

$$f(5) = 25e^{-1} \approx 9,196986$$

Or  $f(5)$  représente le nombre de milliers de jouets vendus le 5-ième jour, soit ici environ 9,196986 milliers de jouets ce qui nous donne, arrondi à l'unité 9197 jouets.

**Partie C**

**1. Un logiciel de calcul formel nous donne les résultats suivants :**

1	dériver $[(5 - x) * \exp(-0.2 * x)]$
	$-\exp(-0.2 * x) - \frac{1}{5} * \exp(-0.2 * x) * (-x + 5)$
2	Factoriser $[-\exp(-0.2 * x) - \frac{1}{5} * \exp(-0.2 * x) * (-x + 5)]$
	$\frac{x - 10}{5} * \exp(-0.2 * x)$

**Utiliser ces résultats pour déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction  $f$  est convexe.**

En mathématiques, une fonction réelle d'une variable réelle est dite **convexe** (respectivement **concave**) si son graphe est « tourné vers le haut » ; c'est à dire que si A et B sont deux points du graphe de la fonction, le segment [AB] est entièrement situé au-dessus (respectivement au-dessous) du graphe. De plus on a les propriétés suivantes :

**Proposition 1 (Fonction convexe/concave)**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction  $f$  est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus (resp. *au-dessous*) de chacune de ses tangentes ;
- $f$  est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa dérivée est croissante (resp. *décroissante*) sur I.

**Proposition 2 (Fonction convexe)**

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

**$f$  est convexe** si et seulement si sa **dérivée seconde  $f''$  est à valeurs positives ou nulles.**

Le logiciel de calcul formel a donc ici calculé la dérivée seconde de  $f$  et l'a factorisée. On suppose donc  $f$  deux fois dérivable avec pour tout réel  $x$  de  $[0; 18]$  :

$$f''(x) = \frac{x-10}{5} \times e^{-0,2x} = (x-10) \times e^{-0,2x} \times \frac{1}{5}$$

La fonction dérivée seconde s'exprime ici comme un produit de facteurs. Pour tout réel  $x$ , le facteur  $e^{-0,2x} \times \frac{1}{5}$  est strictement positif donc le signe de  $f''(x)$  dépend uniquement de celui de  $(x-10)$  dont l'étude est aisée.

$$\forall x \in [0; 18] ; \left. \begin{array}{l} x-10 > 0 \iff 18 \geq x > 10 \\ x-10 = 0 \iff x = 10 \end{array} \right\} \implies x-10 < 0 \iff 0 \leq x < 10$$

De fait  $f''(x)$  est nul en  $x = 10$ , positif sur  $]10; 18[$  et négatif sur  $]0; 10[$ .

En appliquant la proposition 4, puisque la fonction dérivée seconde est positive ou nulle sur  $[10; 18[$ , la fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $[10; 18[$ .

### Correction de l'exercice 4 : Asie 17 Juin 2015

#### Commun à tous les candidats

#### Partie A

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 10]$  par :  $f(x) = x + e^{-x+1}$ .

Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	$f(x) := x + \exp(-x + 1)$
	// Interprète $f$ // Succès lors de la compilation $f$
	$x \mapsto x + \exp(-x + 1)$
2	derive ( $f(x)$ )
	$-\exp(-x + 1) + 1$
3	solve ( $-\exp(-x + 1) + 1 > 0$ )
	$[x > 1]$
4	derive ( $-\exp(-x + 1) + 1$ )
	$\exp(-x + 1)$

#### 1. Étude des variations de la fonction $f$

1. a. En s'appuyant sur les résultats ci-dessus, déterminer les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.

La ligne 2 du logiciel nous donne la dérivée de  $f$  qui s'exprime sous la forme :

$$\forall x \in [0; 10] ; f'(x) = -\exp(-x + 1) + 1$$

- On a pour tout réel  $x \in [0; 10]$  :

$$f'(x) = 0 \iff -\exp(-x + 1) + 1 = 0$$

$$f'(x) = 0 \iff e^{-x+1} = 1$$

$$f'(x) = 0 \iff e^{-x+1} = e^0$$

Par propriété de la fonction exponentielle (stricte croissance sur  $\mathbb{R}$ )

$$f'(x) = 0 \iff -x + 1 = 0$$

soit

$$\forall x \in [0; 10] ; \boxed{f'(x) = 0 \iff x = 1}$$

- En outre pour tout réel  $x \in [0; 10]$  :  
La ligne 3 du logiciel nous donne la résolution de l'inéquation

$$f'(x) > 0 \iff x > 1$$

En conséquence :

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0 \iff 10 \geq x > 1 \\ f'(x) = 0 \iff x = 1 \end{array} \right\} \implies f'(x) < 0 \iff 0 \leq x < 1$$

La fonction  $f$  est donc croissante sur  $[1; 10]$  et décroissante sur  $[0; 1]$ .

On peut alors dresser le tableau de variations de  $f$  avec les valeurs aux bornes :

$x$	0	1	10
$f(x)$	$e$	2	$10 + e^{-9} \approx 10$

$x$	0	1	10
$f'(x)$	-		+
Variations de $f$	$e \approx 2.7$ <span style="font-size: 2em;">↘</span>		$10 + e^{-9} \approx 10$ <span style="font-size: 2em;">↗</span>

**1. b. En déduire que la fonction  $f$  admet un minimum dont on précisera la valeur.**

Sur l'intervalle  $[0; 10]$  la fonction  $f$  admet donc un minimum en 1, qui vaut  $f(1) = 2$ .

**2. Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 10]$ .**

**Proposition 3** (Fonction convexe/concave)

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- La fonction  $f$  est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus (resp. *au-dessous*) de chacune de ses tangentes ;
- $f$  est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa dérivée est croissante (resp. *décroissante*) sur  $I$ .

**Proposition 4** (Fonction convexe/concave)

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .

**$f$  est convexe** si et seulement si **sa dérivée seconde  $f''$  est à valeurs positives ou nulles.**  
 **$f$  est concave** si et seulement si **sa dérivée seconde  $f''$  est à valeurs négatives ou nulles.**

La fonction dérivée  $f'$  est dérivable sur  $[0; 10]$ .

La ligne 4 du logiciel nous donne la dérivée seconde de  $f$  qui est strictement positive :

$$\forall x \in [0; 10] ; f''(x) = e^{-x+1} > 0$$

De ce fait, la propriété 4 implique que  $f$  soit convexe sur  $[0; 10]$ .

**Partie B**

**Le coût de revient est modélisé par la fonction  $f$  où  $x$  est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets et  $f(x)$  le coût de revient exprimé en milliers d'euros.**

**1. Quel nombre d'objets faut-il produire pour que le coût de revient soit minimum ?**

D'après la question **A1b.**, sur l'intervalle  $[0; 10]$  la fonction  $f$  admet un minimum en 1, qui vaut  $f(1) = 2$ .

Le coût de revient est modélisé par la fonction  $f$  où  $x$  est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets et  $f(x)$  le coût de revient exprimé en milliers d'euros donc il faut produire 1 centaine d'objets soit 100 objets pour que le coût de revient soit minimal, égal à  $1000 \times f(1) \approx 2000\text{€}$ .

**2. Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12 €. On appelle marge brute pour  $x$  centaines d'objets, la différence entre le montant obtenu par la vente de ces objets et leur coût de revient.**

**2. a. Justifier que le montant obtenu par la vente de  $x$  centaines d'objets est  $1,2x$  milliers d'euros.**

Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12 € donc la vente de  $x$  centaines d'objets rapporte  $12x$  centaines d'euros soit  $1,2x$  milliers d'euros.

**2. b. Montrer que la marge brute pour  $x$  centaines d'objets, en milliers d'euros, est :  $g(x) = 0,2x - e^{-x+1}$ .**

La marge brute pour  $x$  centaines d'objets, notée  $g(x)$ , en milliers d'euros, est donnée par la différence entre le montant obtenu par la vente de  $x$  centaines d'objets soit  $1,2x$  milliers d'euros et le coût de revient est modélisé par la fonction  $f$  où  $x$  est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets et  $f(x)$  le coût de revient exprimé en milliers d'euros.

$$\forall x \in [0; 10] ; g(x) = 1,2x - f(x) = 1,2x - (x + e^{-x+1})$$

$$\forall x \in [0; 10] ; g(x) = 0,2x - e^{-x+1}$$

**2. c. Montrer que la fonction  $g$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; 10]$ .**

La fonction  $g$  est dérivable sur  $[0; 10]$  comme différence de fonctions qui le sont :

$$\forall x \in [0; 10] ; g(x) = 1,2x - f(x)$$

Donc on a facilement la dérivée de  $g$  en utilisant la **partie A1 a**.

$$\forall x \in [0; 10] ; g'(x) = (1,2x)' - f'(x) = 1,2 + e^{-x+1} - 1$$

$$\forall x \in [0; 10] ; g'(x) = 0,2 + e^{-x+1}$$

L'exponentielle étant strictement positive sur  $\mathbb{R}$ , la dérivée  $dg$  s'exprime donc comme la somme de deux termes strictement positifs sur  $[0; 10]$ .

La fonction  $g$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; 10]$ .

**3. 3. a. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  possède une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0; 10]$ .**

On peut alors dresser le tableau de variations de  $g$  avec les valeurs aux bornes :

$$\forall x \in [0; 10] ; g(x) = 0,2x - e^{-x+1}$$

$x$	0	10
$f(x)$	$-e \approx -2.7$	$2 - e^{-9} \approx 2$

$x$	0	$\alpha$	10
Signe de $g'(x)$	+		
$g$	$-e \approx -2.7$	0	$2 - e^{-9} \approx 2$

**Théorème 1** (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si  $f$  est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle  $[a; b]$ , alors, pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une unique solution dans  $[a; b]$ .

**Remarque :** La première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).



**Application du corollaire :**

- La fonction  $g$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $[0; 10]$  ;
- Le réel  $k = 0$  est compris entre  $g(0)$  et  $g(10)$  :

$$g(0) \approx -2,7 < 0 < g(10) \approx 2$$

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0; 10]$ .

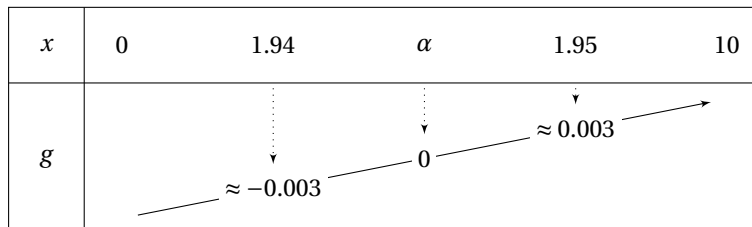
**3. b. Déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,01.**

Pour avoir un encadrement de  $\alpha$ , on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

- Avec un pas de  $\Delta = 0,01$  on obtient :  $\left\{ \begin{array}{l} g(1,94) \approx -0,0026 < 0 \\ g(1,95) \approx 0,00326 > 0 \end{array} \right\}$ , donc  $1,94 < \alpha < 1,95$ .

**4. En déduire la quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise une marge brute positive sur la vente de ces objets.**

On a vu lors de la question **B2b.** que la marge brute pour  $x$  centaines d'objets, en milliers d'euros, est :  $g(x) = 0,2x - e^{-x+1}$ . L'étude menée lors de la question **B3.** nous permet d'obtenir le signe de  $g$ .



On a donc :

$x$	0	$\alpha$	10
signe de $g(x)$		-	0
			+

Attention maintenant à ne pas conclure trop vite, la quantité d'objets est un nombre entier.

$x$	1,94	1,95
$f(x)$	$g(1,94) \approx -0,0026 < 0$	$g(1,95) \approx 0,00326 > 0$
Nombre d'objets	$1,94 \times 100 = 194$ mais marge brute négative	$1,95 \times 100 = 195$

La quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise une marge brute positive sur la vente de ces objets est de 195 objets.