Math93.com

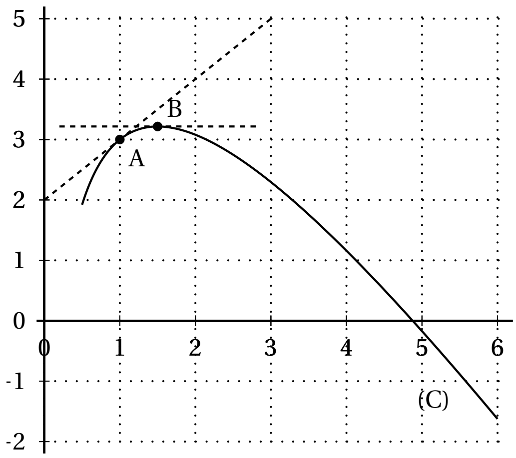
TD n°2 - Terminale ES/L
Les logarithmes ... Au Bac

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD. Les autres proposent juste des éléments de réponses et une correction détaillée sur le site www.math93.com

D'après bac

Exercice 1. D'après Métropole, Juin 2016 (c)

La courbe (C) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0,5\,;6]$. Les points $A(1\ ;\ 3)$ et B d'abscisse $1,5$ sont sur la courbe (C). Les tangentes à la courbe (C) aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale. On note f' la fonction dérivée de f.



Partie A : Étude graphique

1. Déterminer $f'(1,5)$.

2. La tangente à la courbe (C) passant par A passe par le point de coordonnées $(0\ ;2)$. Déterminer une équation de cette tangente.

3. Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$.

4. Déterminer la convexité de la fonction f sur $[0,5\ ;6]$. Argumenter la réponse.

Partie B : Étude analytique

On admet que la fonction f est définie sur $[0,5\,;6]$ par

$$f(x)=-2x+5+3\ln(x).$$

1. Pour tout réel x de $[0,5\,;6]$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=\dfrac{-2x+3}{x}$.

2. Étudier le signe de f' sur $[0,5\,;6]$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[0,5\,;6]$.

3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement une solution α sur $[0,5\ ;6]$.
Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

4. En déduire le tableau de signe de f sur $[0,5\,;6]$.

5. On considère la fonction F définie sur $[0,5\,;6]$ par $F(x)=-x^2+2x+3x\ln(x)$.
Montrer que sur $[0,5\,;6]$, la dérivée de F est $F'=f$.

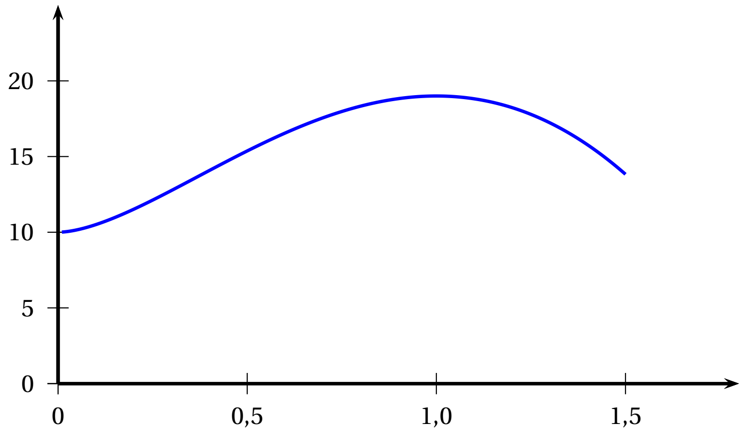
Exercice 2. D'après Amérique Nord, Juin 2016

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1{,}5]$ par

$$f(x) = 9x^2(1 - 2\ln x) + 10.$$

La courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



1.

1. a. Montrer que $f'(x) = -36x\ln x$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,1{,}5]$.

1. b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,1{,}5]$.

1. c. Déduire de la question précédente les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,1{,}5]$.

2. On admet que $f''(x) = -36\ln x - 36$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,1{,}5]$.
Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est e^{-1}.

3. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,1{,}5]$ par

$$F(x) = 10x + 5x^3 - 6x^3\ln x.$$

3. a. Montrer que sur $]0\,;\,1{,}5]$ on a $F' = f$.

Partie B : Application économique

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Une société est cotée en bourse depuis un an et demi.
Le prix de l'action depuis un an et demi est modélisé par la fonction f définie dans la partie A, où x représente le nombre d'années écoulées depuis l'introduction en bourse et $f(x)$ représente le prix de l'action, exprimé en euros.
Indiquer si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Proposition 1 :
« Sur la période des six derniers mois, l'action a perdu plus d'un quart de sa valeur. »

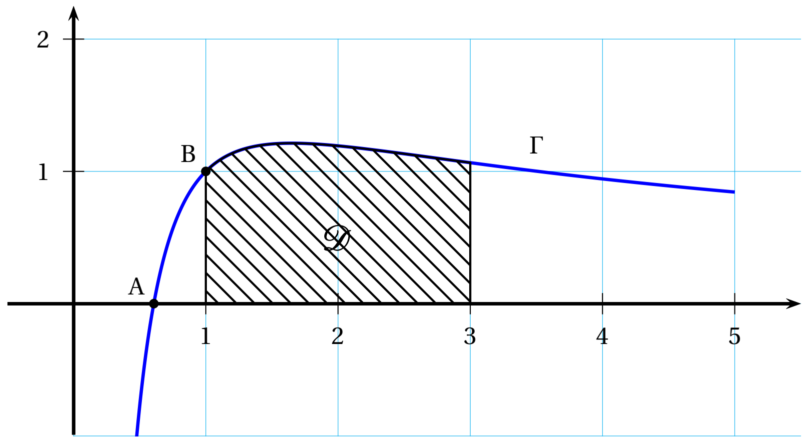
Réponses
Voir la correction détaillée (exercice 4 du sujet) sur www.math93.com

Exercice 3. D'après Nouvelle Calédonie, 2 Mars 2015 (exo 3)

On considère la fonction g, définie et dérivable sur l'intervalle $[0,5\,;\,5]$, et telle que pour tout nombre réel x, on a :

$$g(x) = \frac{2\ln(x)+1}{x}.$$

On note g' sa fonction dérivée et Γ sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.
Soit B le point de Γ d'abscisse 1 ; la droite (OB) est tangente en B à la courbe Γ.



1. Déterminer les coordonnées exactes du point A, point d'intersection de la courbe Γ avec l'axe des abscisses.

2.

2. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0,5\,;\,5]$, on a $g'(x) = \dfrac{1-2\ln(x)}{x^2}$.

2. b. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0,5\,;\,5]$.

2. c. En déduire les variations de g sur l'intervalle $[0,5\,;\,5]$.

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe Γ au point B d'abscisse 1.

4. *(Question 4b adaptée)*

4. a. On note $\mathscr{D}$ le domaine défini par l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
Par lecture graphique, encadrer par deux entiers l'aire de $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire.

4. b. On définit la fonction G sur l'intervalle $[0,5\,;\,5]$ par

$$G(x) = \ln(x)\Big[\ln(x)+1\Big]$$

Montrer que sur l'intervalle $[0,5\,;\,5]$ $G' = g$.

Réponses
(1.) *$A\left(e^{-\frac{1}{2}}\,;0\right)$*
(2b.) *g croissante sur $\left[0,5\,;\ e^{\frac{1}{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[e^{\frac{1}{2}}\ ;\ 5\right]$.*
(3.) *$y = x$* ***(4.a)*** *entre 2 et 3 unités d'aire*
Voir la correction détaillée (exercice 3 du sujet) sur www.math93.com

Exercice 4. D'après Pondichéry, Avril 2014

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Un artisan glacier commercialise des « sorbets bio ». Il peut en produire entre 0 et 300 litres par semaine. Cette production est vendue dans sa totalité.
Le coût total de fabrication est modélisé par la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $\mathrm{I} =]0\,;\,3]$ par

$$f(x) = 10x^2 - 20x\ln x.$$

Lorsque x représente le nombre de centaines de litres de sorbet, $f(x)$ est le coût total de fabrication en centaines d'euros.
La recette, en centaines d'euros, est donnée par une fonction r définie sur le même intervalle I.

Partie A

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f et la droite D représentative de la fonction linéaire r sont données en **annexe**.

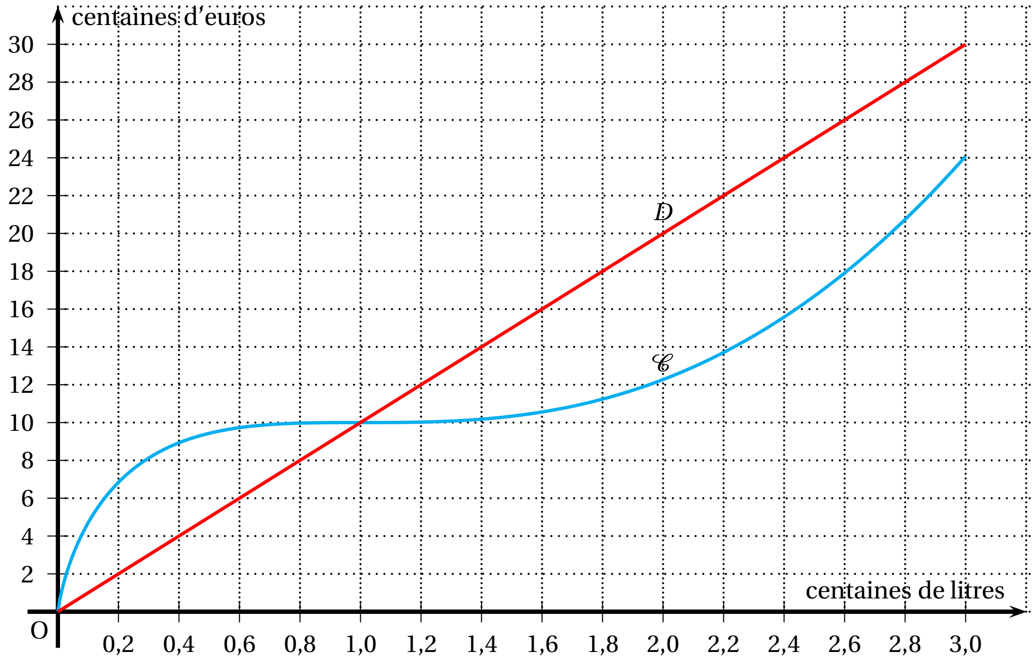
1. Répondre aux questions suivantes par lecture graphique et sans justification.

1. a. Donner le prix de vente en euros de 100 litres de sorbet.

1. b. Donner l'expression de $r(x)$ en fonction de x.

1. c. Combien l'artisan doit-il produire au minimum de litres de sorbet pour que l'entreprise dégage un bénéfice ?

ANNEXE à l'exercice 4 : Pondichéry, Avril 2014



Partie B

On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de x centaines de litres de sorbet produits. D'après les données précédentes, pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,3]$, on a :

$$B(x) = -10x^2 + 10x + 20x \ln x$$

où $B(x)$ est exprimé en centaines d'euros.

1. On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Montrer que, pour tout nombre x de l'intervalle $[1\,;\,3]$, on a :

$$B'(x) = -20x + 20 \ln x + 30$$

2. On donne le tableau de variation de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1\,;\,3]$.

x	1		3
$B'(x)$	$B'(1)$	$\searrow$	
			$B'(3)$

2. a. Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;\,3]$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2}.

2. b. En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,3]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction B sur ce même intervalle.

3. L'artisan a décidé de maintenir sa production dans les mêmes conditions s'il peut atteindre un bénéfice d'au moins 850 euros. Est-ce envisageable ?

Réponses
(A.1.a) *1 000 euros/* ***(A.1.b)*** $r(x) = 10x$ / ***(A.1.c)*** *100 litres au minimum /* ***(B.3)*** *bénéfice maximal d'environ 843 euros.*
Voir la correction détaillée (exercice 4 du sujet) sur www.math93.com

Exercice 5. Asie juin 2014 (c)

On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie.

Partie A

Des relevés statistiques ont permis de modéliser, par une fonction f, le nombre de malades durant l'épidémie.
Cette fonction f est définie sur $[1\,;\,26]$ par :

$$f(t) = 24t\ln(t) - 3t^2 + 10$$

où t est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ est le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[1\,;\,26]$,

$$f'(t) = 24\ln(t) - 6t + 24$$

2. Les variations de la fonction f' sont données dans le tableau suivant :

t	1		4		26
$f'(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

2. a. Montrer que l'équation $f'(t) = 0$ admet, dans l'intervalle $[1\,;\,26]$, une solution et une seule qu'on notera α et donner l'encadrement de α par deux entiers naturels consécutifs.

2. b. En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[1\,;\,26]$ et les variations de f sur $[1\,;\,26]$.

3. Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.

3. a. Dans le contexte du problème, donner une interprétation de l'expression mathématique suivante :

« sur $[4\,;\,26]$, t' est décroissante. »

3. b. À partir des questions précédentes, déterminer le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malades par semaine a commencé à diminuer.

Le coin des EPI (Exercices à Prise d'Initiative)

Les EPI sont des questions ou exercices à prise d'initiative. Il est d'usage de préciser que toute trace de recherche sera valorisée dans la notation.

Exercice 6. D'après Métropole, Juin 2015 - EPI

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 3x - 3x\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
Quelle est la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T ?

Réponses
La courbe $\mathscr{C}_f$ est <u>*au dessous*</u> *de T, sa tangente horizontale au point d'abscisse 1, d'équation $y = 3$.*
Voir la correction détaillée (exercice 4 du sujet) sur www.math93.com

Exercice 7. D'après Métropole, Septembre 2015 (c) - EPI** (assez difficile)

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = 2x^2\ln(x)$$

sur $[0{,}2\,;\,10]$ et on note $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Le but de cet exercice est de prouver que la courbe $\left(C_f\right)$ admet sur $[0{,}2\,;\,10]$ une seule tangente passant par l'origine du repère. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Montrer que pour $x \in [0{,}2\,;\,10]$:
$$f'(x) = 2x(2\ln(x) + 1)$$

2. Soit a un réel de $[0{,}2\,;\,10]$, montrer que la tangente à la courbe $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse a a pour équation :
$$y = 2a(2\ln(a) + 1)x - 2a^2(\ln(a) + 1)$$

3. Répondre alors au problème posé.

Retour sur la fonction exponentielle

Exercice 8. D'après Centres étrangers, Juin 2014

Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x^2-1}.$$

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f.

1.

1. a. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \left(2x^2+1\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$.

1. b. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que pour tout réel x, $f''(x) = 2x\left(2x^2+3\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$.
Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x\left(1-\mathrm{e}^{x^2-1}\right).$$

3. a. Justifier que l'inéquation $1-\mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

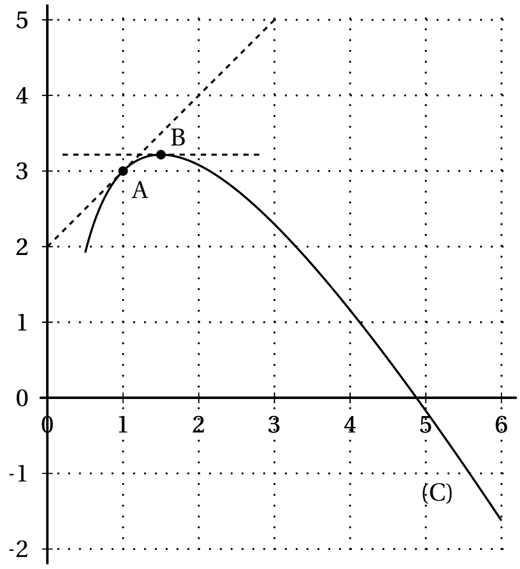
3. b. Déterminer le signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

3. c. En remarquant que pour tout réel x, on a l'égalité $h(x) = x - f(x)$, déduire de la question précédente la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Réponses
Voir la correction détaillée (exercice 2 du sujet) sur www.math93.com

Correction

Correction de l'exercice 1 : Métropole juin 2016



Partie A : Étude graphique

1. Déterminer $f'(1,5)$.
La tangente au point B d'abscisse $1,5$ est horizontale donc de coefficient directeur nul. De ce fait on a :

$$\boxed{f'(1,5)=0}$$

2. La tangente à la courbe (C) au point A passe par le point de coordonnées $(0 ; 2)$. Déterminer en une équation.
Le coefficient directeur a de la tangente à la courbe (C) au point $A(1 ; 3)$ est donc celui de la droite (AC) où $C(0 ; 2)$ donc :

$$a=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{2-3}{0-1}=1$$

L'équation de la tangente est donc de la forme $y=1x+b$. Puisque $C(0 ; 2)$ appartient à cette droite, on a directement l'ordonnée à l'origine, $b=2$.
La tangente à la courbe (C) au point $A(1 ; 2)$ est d'équation :

$$\boxed{(T_1)\ :\ \ y=x+2}$$

3. Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$.
Sur l'intervalle $[1 ; 2]$ la fonction f est supérieure ou égale à 3 et strictement inférieure à 4.
L'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$ est donc inférieure à celle du rectangle de côtés 1 et 4 unités, et supérieure à celle du rectangle de côtés 1 et 3 unités.
L'aire est donc comprise entre 3 et 4 unités d'aires.

4. Déterminer la convexité de la fonction f sur $[0,5 ; 6]$. Argumenter la réponse.
On l'a vu dans l'exercice 1.
En mathématiques, une fonction réelle d'une variable réelle est dite convexe (respectivement concave) si son graphe est « tourné vers le haut » ; c'est à dire que si A et B sont deux points du graphe de la fonction, le segment [AB] est entièrement situé au-dessus (respectivement au-dessous) du graphe. De plus on a les propriétés suivantes :

Proposition -1 (Fonction convexe/concave)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus (resp. *au-dessous*) de chacune de ses tangentes ;
- f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa dérivée est croissante (resp. *décroissante*) sur I.

Ici, la courbe représentative de la fonction f est au-dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle f est concave sur l'intervalle $[0{,}5\,;6]$. De ce fait, d'après la propriété -1, la fonction f est concave sur l'intervalle $[0{,}5\ ;6]$.

Partie B : Étude analytique

On admet que la fonction f est définie sur $[0{,}5\,;6]$ par $f(x) = -2x+5+3\ln x$.

1. **Pour tout réel x de $[0{,}5\,;6]$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{3-2x}{x}$.**

La fonction f est dérivable sur $[0{,}5\,;6]$ comme somme de fonctions qui le sont et on a aisément :

$$\forall x \in [0{,}5\ ;\ 6]\ ;\ f'(x) = -2+3\times\frac{1}{x} = \frac{-2x+3}{x}$$

$$\boxed{\forall x \in [0{,}5\ ;\ 6]\ ;\ f'(x) = \frac{-2x+3}{x}}$$

2. **Étudier le signe de f' sur $[0{,}5\,;6]$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[0{,}5\,;6]$.**

Sur l'intervalle $[0{,}5\,;6]$, le numérateur x de la dérivée f' est strictement positif donc son signe ne dépend que du numérateur $(-2x+3)$. Soit sur l'intervalle $[0{,}5\,;6]$:

$$\forall x \in [0{,}5\ ;\ 6]\ ;\ \begin{cases} f'(x)=0 \iff (-2x+3)=0 \iff x=\dfrac{3}{2} \\ f'(x)>0 \iff (-2x+3)>0 \iff 0{,}5\leq x<\dfrac{3}{2}\end{cases} \Bigg| \implies f'(x)<0 \iff \frac{3}{2}<x\leq 6$$

La fonction f est donc croissante sur $[0{,}5;\,1{,}5]$ et décroissante sur $[1{,}5;\,6]$.

$$v : \begin{cases} [0{,}5\ ;\ 6] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & v(x) = -2x+5+3\ln x\end{cases}$$

On a :

$$f(0{,}5) = 4-3\ln 2 \approx 1{,}921\ ;\ f(1{,}5)\approx 3{,}216\ \text{ et }\ f(6) = 3\ln 6 - 7 \approx -1{,}625$$

x	0.5		1.5		6
$f'(x)$		+	0	−	
f	$f(0.5)\approx 1.921$	↗	$f(1.5)\approx 3.216$	↘	$f(6)\approx -1.625$

3. **Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution α sur $[0,5\,;6]$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.**

x	0.5		1.5		α		6
$f'(x)$		+	0	−			
f	$f(0.5) \approx 1.921$	$\nearrow$	$f(1.5) \approx 3.216$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(6) \approx -1.625$

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)
Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).

Application du corollaire sur [1.5; 6] :

- La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[1.5; 6]$;
- L'image par f de l'intervalle $[1.5; 6]$ est $\left[f(6)\,;\,f(1.5)\right]$ d'après le tableau de variations.
- On a :
$$f(6) \approx -1.625 < 0 < f(1.5) \approx 3.216$$
Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[1.5; 6]$.
- **Valeur approchée**.
Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.
  – Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient : $\left\{\begin{array}{lcr} f(4,87) & \approx & 0,009 > 0 \\ f(4,88) & \approx & -0,005 < 0 \end{array}\right|$, donc $4,87 < \alpha < 4,88$.

  Une valeur approchée de α à 0.01 près est donc $\alpha \approx 4,88$.

Sur l'intervalle [0,5 ; 1,5]
Sur l'intervalle $[0,5\,;\,1,5]$, la fonction f est strictement croissante et son minimum est strictement positif $f(0,5) \approx 1,921 > 0$.
l'équation $f(x) = 0$ n'admet donc pas de solution sur cet intervalle.

Conclusion
La fonction f admet une unique solution α sur l'intervalle $[0,5\,;\,6]$. Une valeur approchée de α au centième est alors $4,88$.

4. **En déduire le tableau de signe de f sur $[0,5\,;6]$.**
A l'aide du tableau de variations de f, on peut conclure que f est positive strictement sur l'intervalle $[0,5;\alpha[$, négative strictement sur $[\alpha;6]$ et nulle en α.

x	0.5		α		6
signe de $f(x)$		+	0	−	

5. On considère la fonction F définie sur [0,5 ; 6] par $F(x) = -x^2 + 2x + 3x\ln(x)$.
Montrer que sur [0,5 ; 6], la dérivée de F est $F' = f$.

La fonction F est dérivable sur [0,5 ; 6] comme somme et composées de fonction qui le sont. F est de la forme $w + uv$ donc de dérivée $w' + u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0,5\ ;\ 6]\ ;\ \begin{cases} u(x) = 3x & ; \quad u'(x) = 3 \\ v(x) = \ln x & ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{x} \\ w(x) = -x^2 + 2x & ; \quad w'(x) = -2x + 2 \end{cases}$$

On a donc pour tout réel x de [0,5 ; 6] :

$$F(x) = -x^2 + 2x + 3x\ln x$$

Et :

$$F'(x) = w'(x) + u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$
$$F'(x) = -2x + 2 + 3\ln x + 3x \times \frac{1}{x}$$
$$F'(x) = -2x + 2 + 3\ln x + 3$$

$$\boxed{\forall x \in [0,5\ ;\ 6]\ ;\ F'(x) = -2x + 5 + 3\ln x = f(x)}$$

La fonction F est donc une primitive de f sur [0,5 ; 6] puisque l'on vient de montrer que $F' = f$.

Correction de l'exercice 7 : Métropole Septembre 2015

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^2\ln(x)$ sur $[0,2\ ;\ 10]$ et on note $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Le but de cet exercice est de prouver que la courbe $\left(C_f\right)$ admet sur [0,2 ; 10] une seule tangente passant par l'origine du repère.

1. **Montrer que pour $x \in [0,2\ ;\ 10]$, $f'(x) = 2x(2\ln(x)+1)$.**
La fonction f est dérivable sur $[0,2\ ;\ 10]$ comme produit de fonctions dérivables. La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec pour tout réel x de $[0,2\ ;\ 10]$:

$u(x) = 2x^2$	$u'(x) = 4x$
$v(x) = \ln x$	$v'(x) = \dfrac{1}{x}$

Pour tout réel x de $[0,2\ ;\ 10]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x \times \ln(x) + 2x^2 \times \frac{1}{x} \\ &= 4x\ln(x) + 2x \\ f'(x) &= \underline{2x(2\ln(x)+1)} \end{aligned}$$

2. **Soit a un réel de $[0,2\ ;\ 10]$., montrer que la tangente à la courbe $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse a a pour équation $y = 2a(2\ln(a)+1)x - 2a^2(\ln(a)+1)$.**
Une équation de la tangente T à la courbe (C_f) au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \text{ avec } \begin{cases} f(a) = 2a^2\ln(a) \\ f'(a) = 2a(2\ln(a)+1) \end{cases}$$

Donc T a pour équation :

$$\begin{aligned} y = 2a(2\ln(a)+1)(x-a) + 2a^2\ln(a) &\iff y = 2a(2\ln(a)+1)x - 2a(2\ln(a)+1) \times a + 2a^2\ln(a) \\ &\iff y = 2a(2\ln(a)+1)x - 4a^2\ln(a) - 2a^2 + 2a^2\ln(a) \\ &\iff y = 2a(2\ln(a)+1)\ x\ \ - 2a^2(\ln(a)+1) \end{aligned}$$

$$\boxed{T\ :\ y = \underbrace{2a(2\ln(a)+1)}_{m}\ x\ \ \underbrace{-2a^2(\ln(a)+1)}_{p}}$$

3. **Répondre alors au problème posé.**
La droite T est d'équation $y = mx + p$ avec $\begin{cases} m = 2a(2\ln(a)+1) \\ p = -2a^2(\ln(a)+1) \end{cases}$
Elle passe par l'origine si et seulement si son ordonnée à l'origine p est nulle donc si :

$$-2a^2(\ln(a)+1) = 0$$

Or $a \in [0,2\ ;\ 10]$ donc $a \neq 0$; il faut donc que :

$$\ln(a) + 1 = 0 \iff \ln(a) = -1 \iff a = \mathrm{e}^{-1}$$

L'unique valeur a de $[0,2\ ;\ 10]$ pour laquelle la tangente à (C_f) au point d'abscisse a passe par l'origine est $a = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
L'équation réduite de la tangente est alors : $y = 2\dfrac{1}{\mathrm{e}}(-2+1)x$ soit

$$\boxed{y = -\frac{2}{\mathrm{e}}x}$$

Correction de l'exercice 5 : Asie juin 2014

Partie A

Des relevés statistiques ont permis de modéliser, par une fonction f, le nombre de malades durant l'épidémie. Soit f la fonction définie sur $[\![1\ ;\ 26]\!]$ *par :*

$$f(t) = 24t\ln(t) - 3t^2 + 10$$

où t est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ est le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[1\,;26]$, $f'(t) = 24\ln(t) - 6t + 24$.
La fonction f est définie et dérivable sur $[1\,;26]$. f est de la forme $uv + w$ donc de dérivée $u'v + uv' + w'$ avec pour tout réel t de $[1\,;26]$:

$u(t) = 24t$	$u'(t) = 24$
$v(t) = \ln t$	$v'(t) = \dfrac{1}{t}$
$w(t) = -3t^2 + 10$	$w'(t) = -6t$

Pour tout réel t de $[1\,;26]$:

$$f'(t) = 24 \times \ln(t) + 24t \times \frac{1}{t} - 6t + 0$$
$$f'(t) = \underline{24\ln(t) - 6t + 24}$$

2. Les variations de la fonction f' sont données dans un tableau.

2. a. Montrer que l'équation $f'(t) = 0$ admet, dans l'intervalle $[1\,;26]$, une solution et une seule qu'on notera α et donner l'encadrement de α par deux entiers naturels consécutifs.
On complète le tableau de variations de la fonction f' :

$$f'(1) = 18 > 0\ ;\ f'(4) = 24\ln 4 \approx 33,3 > 0 \text{ et } f'(26) = 24\ln(26) - 132 \approx -53,8 < 0$$

t	1		4		α		26
$f'(t)$	18	$\nearrow$	33,3	$\searrow$	0	$\searrow$	$-53,8$

D'après ce tableau de variations :

- La fonction f' est strictement décroissante et continue sur $[4\,;26]$;
- Le réel $k = 0$ est compris entre $f'(4) > 0$ et $f'(26) < 0$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(t) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[\![1\,;26]\!]$ et cette solution, appelée α, est dans l'intervalle $[\![4\,;26]\!]$.

Plus précisément :

$$\begin{cases} f'(14) \approx 3,34 > 0 \\ f'(15) \approx -1,01 < 0 \end{cases} \Longrightarrow 14 < \alpha < 15$$

2. b. En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[1\,;26]$ et les variations de f sur $[1\,;26]$.
Du tableau de variations, on peut déduire que $f'(t) > 0$ sur $[\![1\,;\alpha[\![$ et que $f'(t) < 0$ sur $]\!]\alpha\,;26]\!]$.

Donc la fonction f est : est strictement croissante sur $[\![1\,;\alpha]\!]$, est strictement décroissante sur $[\![\alpha\,;26]\!]$ et elle atteint un maximum pour $x = \alpha$.

3. *Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.*

3. a. Dans le contexte du problème, donner une interprétation de l'expression mathématique suivante : « sur [4 ; 26], t' est décroissante. »

L'expression mathématique suivante : « sur $[\![4\ ;\ 26]\!]$, f' est décroissante » signifie que sur cet intervalle, la vitesse de propagation de la maladie diminue.

3. b. À partir des questions précédentes, déterminer le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malades par semaine a commencé à diminuer.

Le nombre de malades est donné par la fonction f ; ce nombre diminue quand la fonction f est décroissante, autrement dit quand sa dérivée f' est négative. D'après son tableau de variations, la dérivée f' s'annule pour $x = \alpha$ et est négative sur l'intervalle $]\!]\alpha\,;26]\!]$.

On sait que :

$$14 < \alpha < 15 \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(14) \approx 308,7 \\ f(15) \approx 309,9 \end{cases} \Longrightarrow f(14) < f(15)$$

On calcule

$$f(16) \approx 306,7 \text{ donc } f(16) < f(15).$$

C'est donc à partir de la semaine n° 16 que le nombre de malades diminue, donc après 15 semaines écoulées.