Math93.com

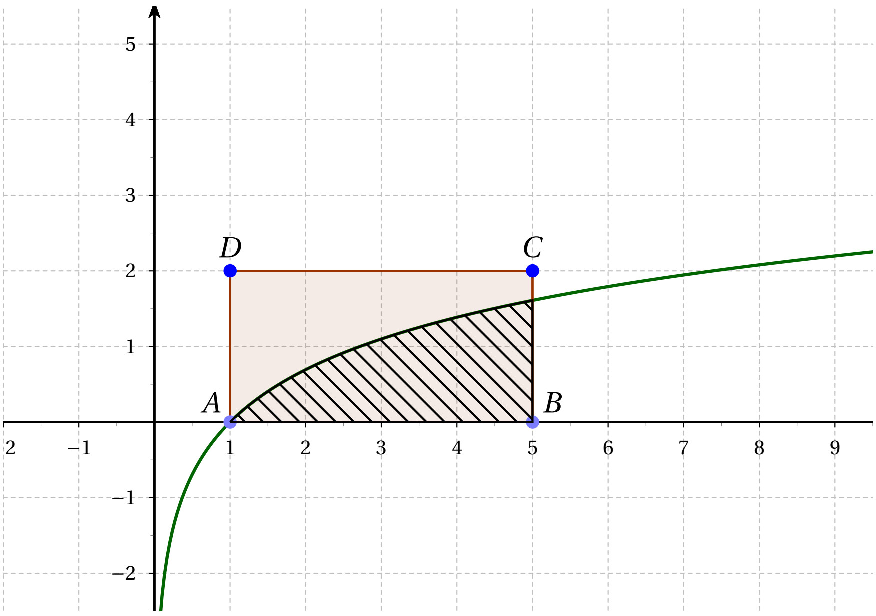
TD n°1 - Terminale ES/L
Intégration

Calculs d'intégrales et approximation

Exercice 1. Application directe

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x$$



1. On donne la courbe de f sur le graphique ci-dessous. Donner un encadrement (en unités d'aire du repère orthogonal donné) de l'aire située sous la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 5$.

2. Montrer qu'une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ est :

$$F(x) = x\ln x - x$$

3. Montrer que l'intégrale sur $[1\,;5]$ de f est :

$$\int_1^5 \ln x \,\mathrm{d}x = 5\ln 5 - 4$$

4. La fonction f est positive sur $[1\,;5]$. Donner une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré, c'est à dire de l'aire située sous la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 5$.

5. Donner la mesure, en unités d'aire, de l'aire du rectangle ABCD. En déduire l'aire de la partie du rectangle ABCD qui n'est pas hachurée. On donnera une valeur approchée au dixième.

6. On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction continue sur $[a\,;\,b]$ est $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Calculer la valeur moyenne de f sur $[1\,;5]$.

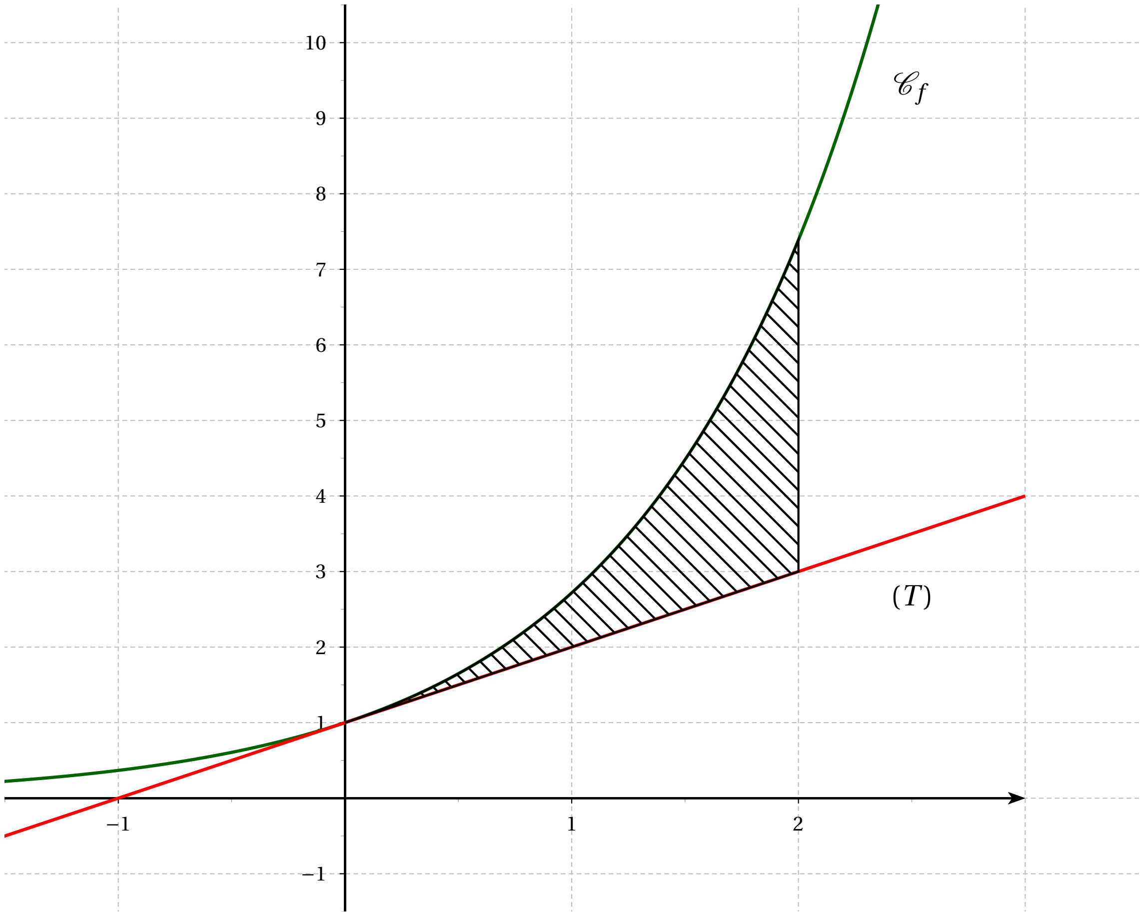
Réponses

(1.) $3 < \mathscr{A} < 6$ ***(4.)*** $\mathscr{A} \approx 4{,}05$ ***(5.)*** $\approx 3{,}95$ ***(6.)*** $m = \dfrac{5\ln 5 - 4}{4}$

Exercice 2. Aire entre une tangente et une courbe

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$



1. On donne la courbe de f sur le graphique ci-dessous et la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   Montrer que l'équation de (T) est $y = x + 1$.

2. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de (T) sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer :
$$I = \int_0^2 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \;\text{ et }\; J = \int_0^2 x + 1 \, \mathrm{d}x$$

4. En déduire que l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré, c'est à dire de l'aire située entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et (T), et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ est :
$$\mathscr{A} = \mathrm{e}^2 - 5 \approx 2{,}39 \text{ u.a.}$$

5. On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction continue sur $[a\,;\,b]$ est $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Calculer la valeur moyenne de f sur $[0;2]$.

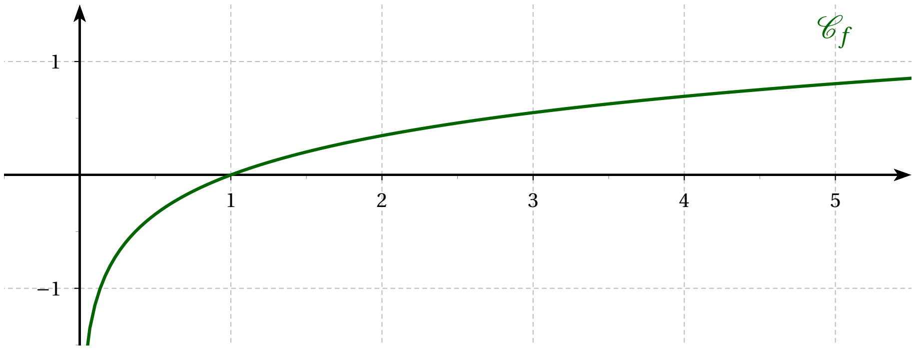
Réponses

(3.) $I = e^2 - 1\,;\, J = 4$ ***(5.)*** $m = \dfrac{e^2-1}{2}$

Exercice 3. Aire entre une tangente et une courbe

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln x}{2}$$



1. On donne la courbe de f sur le graphique ci-dessus.
Hachurer sur le graphique l'aire située sous la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=1$ et $x=\mathrm{e}$.

2. Donner un encadrement (en unités d'aire du repère orthogonal donné) de l'aire hachurée.

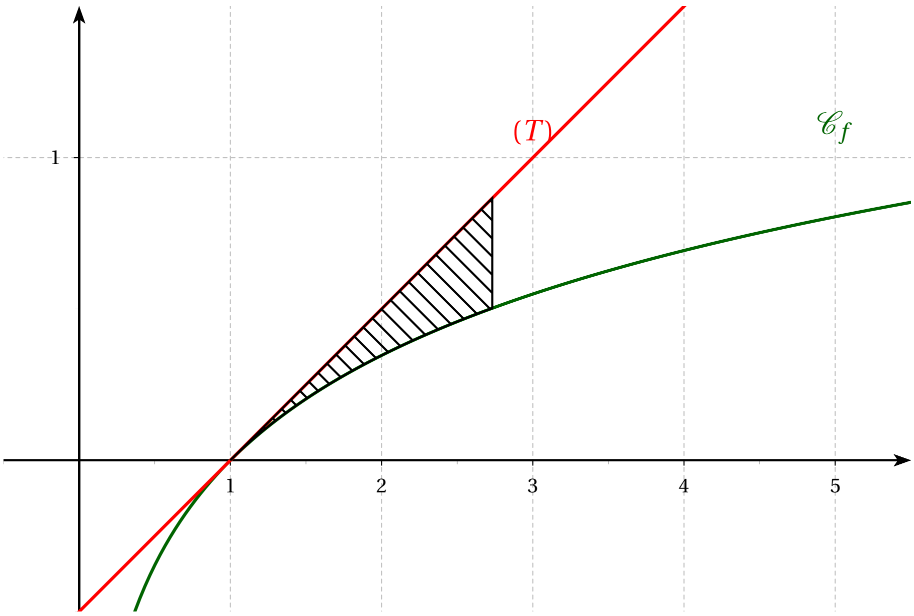
3. Montrer qu'une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ est :

$$F(x)=\frac{x\ln x-x}{2}$$

4. Montrer que l'intégrale sur $[1\,;\mathrm{e}]$ de f est :

$$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

5. On a tracé ci-dessous (T), la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.



5. a. Montrer que la tangente (T) est d'équation $y=\frac{1}{2}(x-1)$.

5. b. Montrer que (T) est située au dessus de $\mathscr{C}_f$.

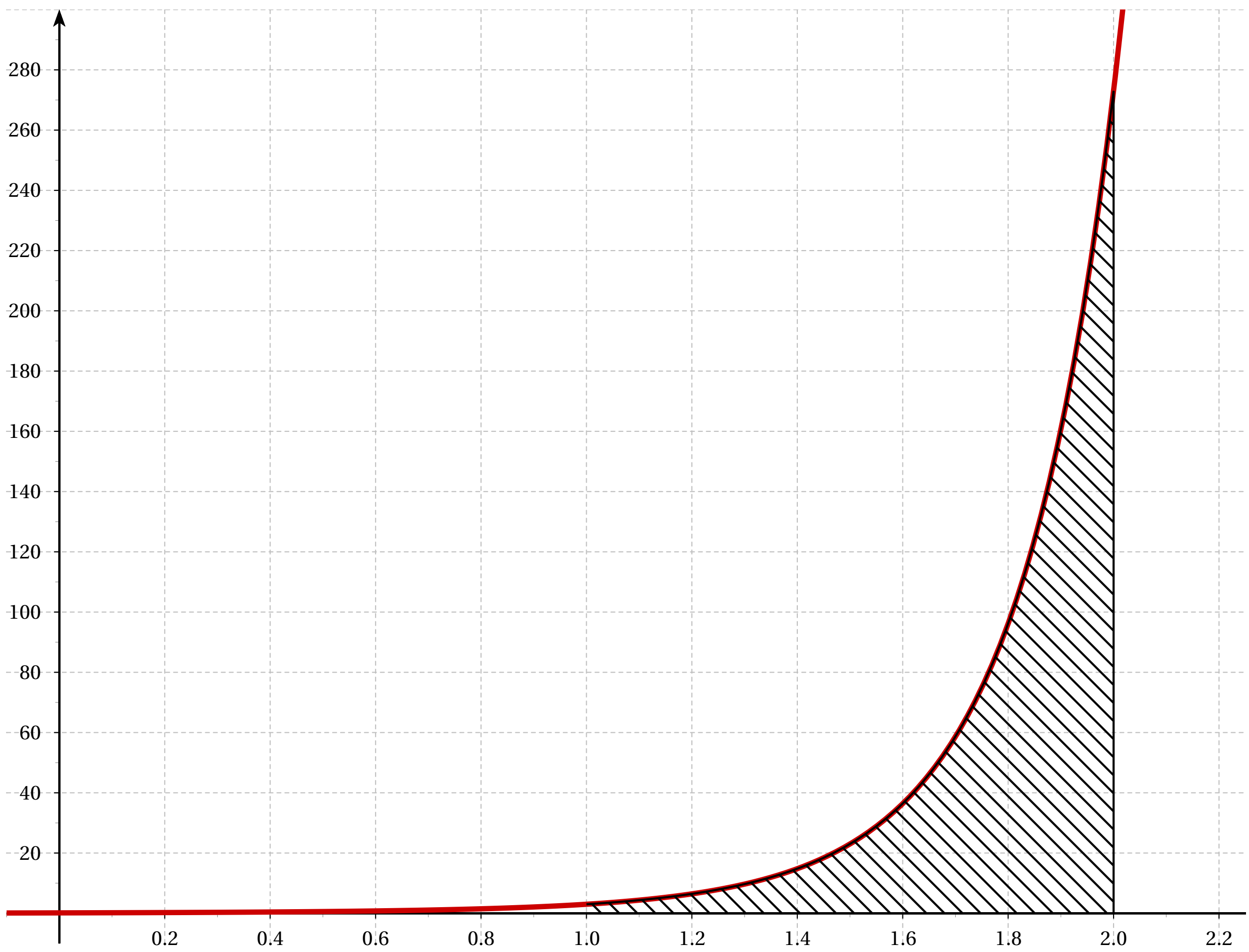
5. c. Montrer que l'aire, en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente (T) et les droites d'équations $x=1$ et $x=\mathrm{e}$ est, arrondie au millième, de $0{,}238$ u.a..

Exercice 4. Calcul d'aire

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{x^2+x-2}$$

1. On donne la courbe de g sur le graphique ci-dessous.



1. a. Que représente un carreau du repère donné ci-dessus en unités d'aire ?

1. b. Donner un encadrement (en unités d'aire du repère) de l'aire située sous la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

2. Montrer qu'une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est :

$$G(x) = \mathrm{e}^{x^2+x-2}$$

3. Montrer que l'intégrale sur $[1\,;2]$ de g est :

$$\int_1^2 (2x+1)\,\mathrm{e}^{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^4 - 1$$

4. La fonction g est positive sur $[1\,;2]$. Donner une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré, c'est à dire de l'aire située sous la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

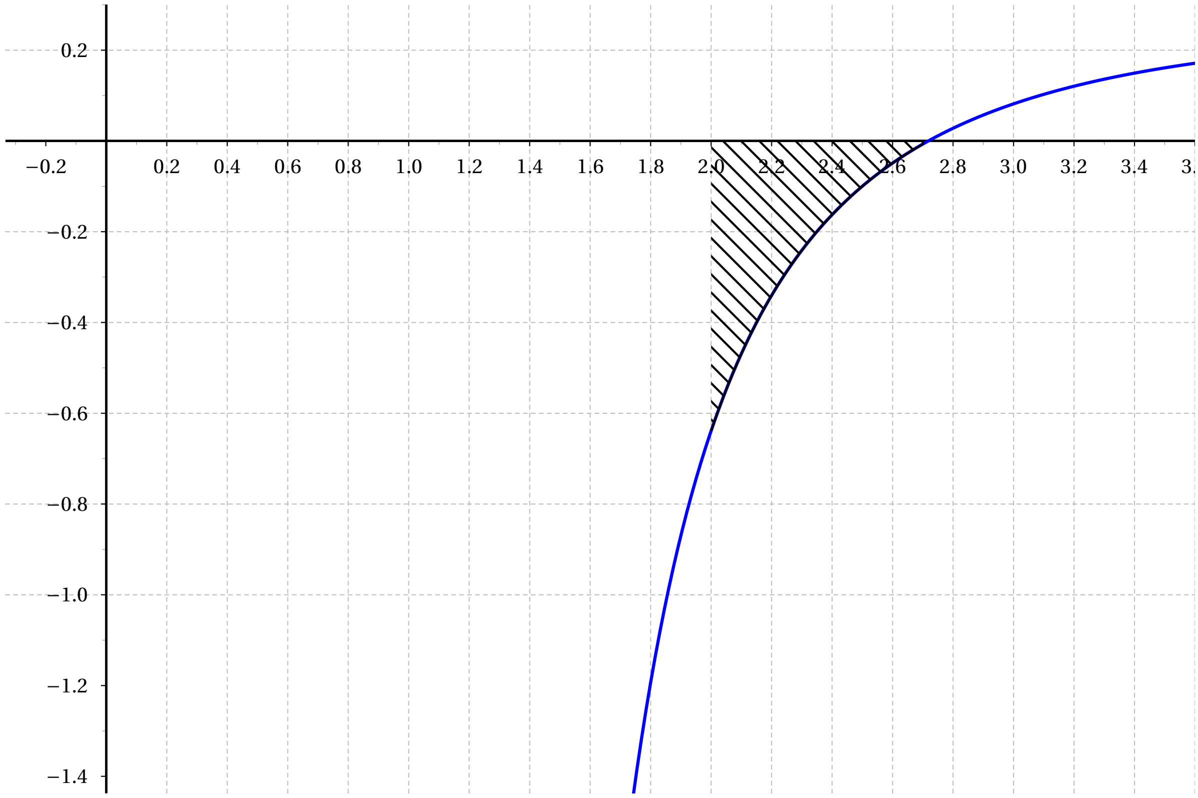
Réponses
(1.a) *1 carreau* $= 4$ *u.a.* ***(1.b)*** $28 < \mathscr{A} < 76$ ***(4.)*** $\mathscr{A} \approx 53{,}6$

Exercice 5. Et quand la fonction est négative !

On considère la fonction h définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

1. On donne la courbe de h sur le graphique ci-dessous.



1. a. Que représente un carreau du repère donné ci-dessus en unités d'aire ?

1. b. Donner un encadrement (en unités d'aire du repère) de l'aire située sous la courbe $\mathscr{C}_h$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 2$ et $x = \mathrm{e}$.

2. Montrer qu'une primitive de h sur $]1\,;+\infty[$ est :

$$H(x) = \frac{x}{\ln x}$$

3. Montrer que l'intégrale sur $[2\,;\,\mathrm{e}]$ de h est :

$$\int_2^{\mathrm{e}} \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \frac{2}{\ln 2}$$

4. Vérifier que l'encadrement obtenu lors de la question **(1.)** est conforme avec la résultat de la question précédente.

Réponses
(1.a) *1 carreau* $= 0,04$ *u.a.* ***(1.b)*** $0,12 < \mathscr{A} < 0,28$ ***(4.)*** $\mathscr{A} \approx 0,167$