Math93.com

TD n°2 - Terminale ES/L
Intégration

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

Exercice 1. Liban mai 2016 — 6 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[3\,;\,13]$ par :

$$f(x) = -2x + 20 - \mathrm{e}^{-2x+10}.$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que la fonction dérivée f', de la fonction f, définie pour tout x de l'intervalle $[3\,;\,13]$, a pour expression :

$$f'(x) = 2\left(-1 + \mathrm{e}^{-2x+10}\right).$$

2. **2. a.** Résoudre dans l'intervalle $[3\,;\,13]$ l'inéquation : $f'(x) \geqslant 0$.

   2. b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[3\,;\,13]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Les valeurs du tableau seront, si besoin, arrondies à 10^{-3}.

   2. c. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

Partie B : Application

Une usine fabrique et commercialise des toboggans. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 300 et 1 300. On suppose que toute la production est commercialisée.
Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de toboggans est modélisé sur l'intervalle $[3\,;\,13]$ par la fonction f.
En utilisant la partie A, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal et donner ce bénéfice, arrondi à l'euro.

2. Calculer le bénéfice moyen pour une production mensuelle comprise entre 300 et 1 300 toboggans. Arrondir le résultat à l'euro.

Partie C : Rentabilité

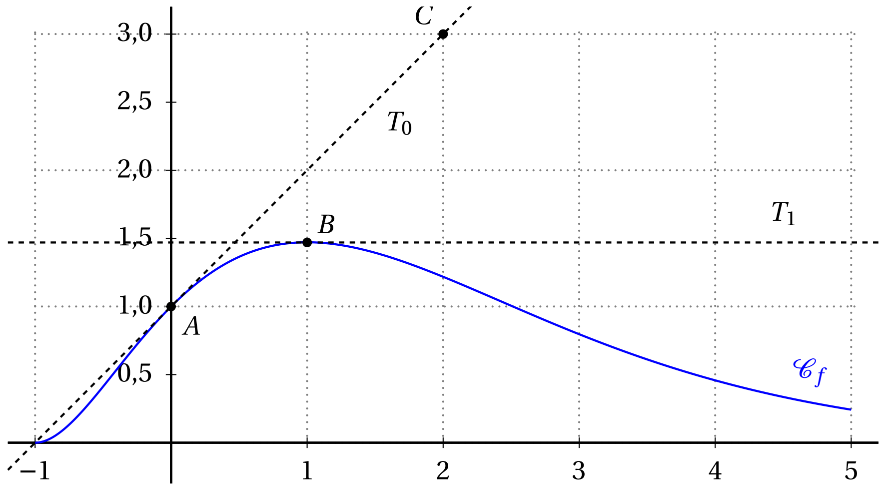
Pour être rentable, l'usine doit avoir un bénéfice positif.
Déterminer le nombre minimum et le nombre maximum de toboggans que l'usine doit fabriquer en un mois pour qu'elle soit rentable. Justifier la réponse.

Réponses
Voir la correction détaillée (exercice 4 du sujet) sur www.math93.com

Exercice 2. Asie juin 2016 — 6 points

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\,;\,5]$. On note f' la fonction dérivée de f. La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A\,(0\,;\,1)$ et par le point B d'abscisse 1. La tangente T_0 à la courbe au point A passe par le point $C\,(2\,;\,3)$ et la tangente T_1 au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



Partie A : QCM

1. La valeur exacte de $f'(1)$ est :

   a. 0 **b.** 1 **c.** 1,6 **d.** autre réponse

2. La valeur exacte de $f'(0)$ est :

   a. 0 **b.** 1 **c.** 1,6 **d.** autre réponse

3. La valeur exacte de $f(1)$ est :

   a. 0 **b.** 1 **c.** 1,6 **d.** autre réponse

4. Un encadrement de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ par des entiers naturels successifs est :

   a. $3 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4$ **b.** $2 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3$

   c. $1 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2$ **d.** autre réponse

Partie B

1. On admet que la fonction F définie sur $[-1\,;\,5]$ par $F(x) = -(x^2+4x+5)\,\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

   1. a. En déduire l'expression de $f(x)$ sur $[-1\,;\,5]$.

   1. b. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

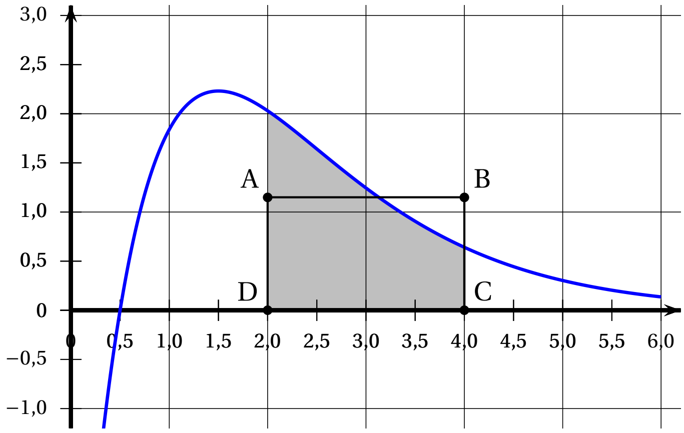
2. Montrer que sur l'intervalle $[1\,;\,5]$, l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution.

Réponses
Voir la correction détaillée (exercice 1 du sujet) sur www.math93.com

Exercice 3. Antilles juin 2016 — 7 points

Commun à tous les candidats

La courbe ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 6]$.
ABCD est un rectangle, le point D a pour coordonnées $(2 ; 0)$ et le point C a pour coordonnées $(4 ; 0)$.



Partie A

Dans cette partie A, les réponses seront données à partir d'une lecture graphique.

1. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$.

2. Avec la précision permise par le graphique, donner une valeur approchée du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 6]$.

3. Quel semble être le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2 ; \ 6]$? Justifier.

4. Pour quelle(s) raison(s) peut-on penser que la courbe admet un point d'inflexion ?

5. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

La fonction f est la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par : $f(x) = (10x - 5)\mathrm{e}^{-x}$.
Un logiciel de calcul formel a donné les résultats suivants (on ne demande pas de les justifier) :

$$f'(x) = (-10x + 15)\,\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad f''(x) = (10x - 25)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Dresser le tableau de variation de f en précisant la valeur de l'extremum et les valeurs aux bornes de l'ensemble de définition.

2. Étudier la convexité de f sur l'intervalle $[0 ; 6]$.

3. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par : $F(x) = (-10x - 5)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur l'intervalle $[0 ; 6]$.

4. En déduire la valeur exacte puis une valeur approchée au centième de $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

5. On souhaiterait que l'aire du rectangle ABCD soit égale à l'aire du domaine grisé sur la figure. Déterminer, à $0,01$ près, la hauteur AD de ce rectangle.

Réponses
Voir la correction détaillée (exercice 3 du sujet) sur www.math93.com

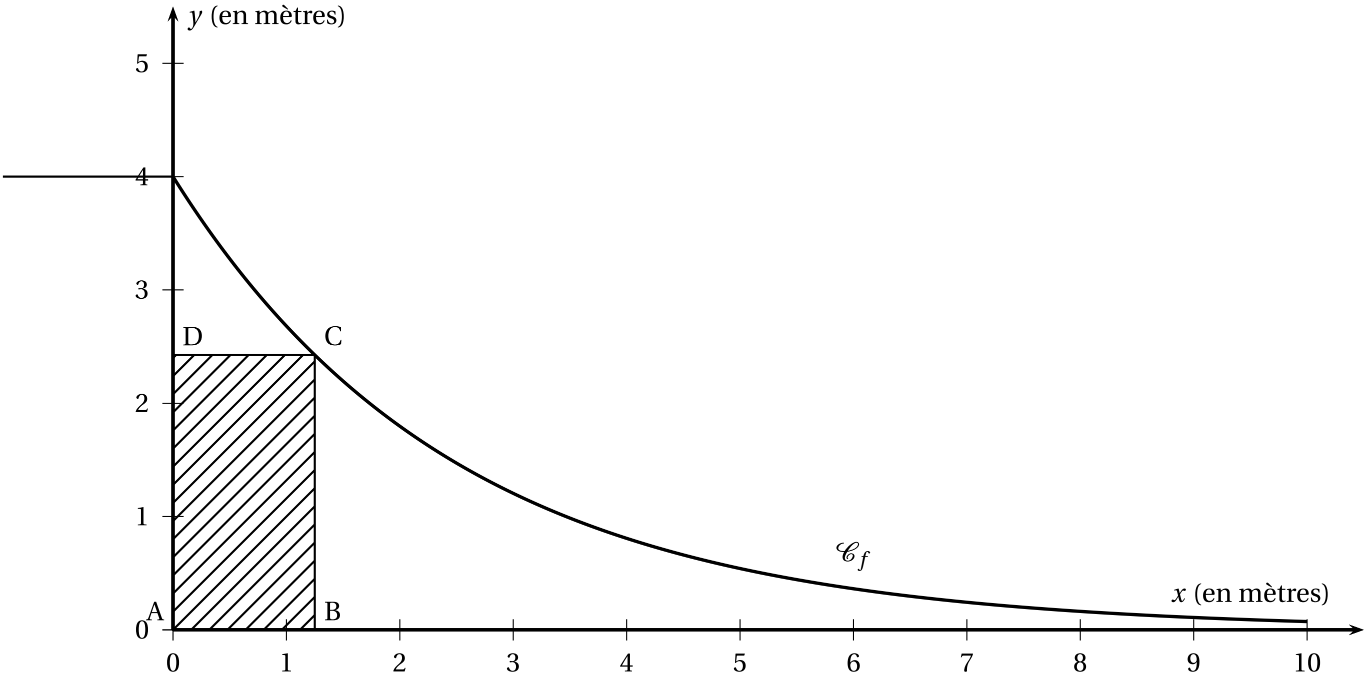
Exercice 4. Polynésie juin 2016 : EPI — 3 points

Commun à tous les candidats

Un publicitaire envisage la pose d'un panneau rectangulaire sous une partie de rampe de skateboard. Le profil de cette rampe est modélisé par la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$f(x) = 4\mathrm{e}^{-0,4x}.$$

Cette courbe $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère d'origine O :



Le rectangle ABCD représente le panneau publicitaire et répond aux contraintes suivantes : le point A est situé à l'origine du repère, le point B est sur l'axe des abscisses, le point D est sur l'axe des ordonnées et le point C est sur la courbe $\mathscr{C}_f$.

1. On suppose dans cette question que le point B a pour abscisse $x = 2$.
Montrer qu'une valeur approchée de l'aire du panneau publicitaire est $3,6\ \mathrm{m}^2$.

2. Parmi tous les panneaux publicitaires qui répondent aux contraintes de l'énoncé, quelles sont les dimensions de celui dont l'aire est la plus grande possible ?
On donnera les dimensions d'un tel panneau au centimètre près.

> **Réponses**
> *Voir la correction détaillée (exercice 3 du sujet) sur www.math93.com*

Exercice 5. Polynésie septembre 2015 (c) 5 points

Commun à tous les candidats

Étude de la répartition des salaires dans deux entreprises

Un cabinet d'audit a été chargé d'étudier la répartition des salaires dans deux filiales d'une entreprise, appelées A et B. Pour l'étude, les salaires sont classés par ordre croissant.

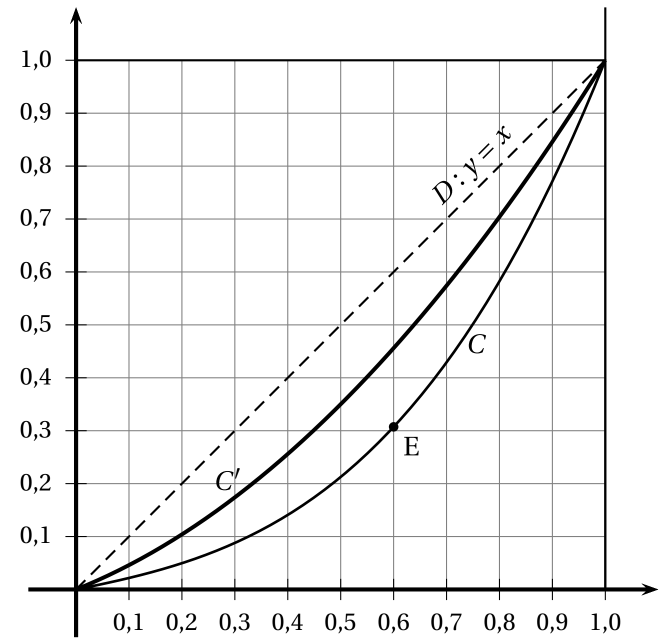
Le cabinet d'audit a modélisé la répartition de salaires par la fonction u pour la filiale A et par la fonction v pour la filiale B.
Les fonctions u et v sont définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$u(x) = 0,6x^2 + 0,4x$$

et

$$v(x) = 0,7x^3 + 0,1x^2 + 0,2x$$

On a tracé ci-contre les courbes représentatives C et C' des fonctions u et v.



1. Déterminer la courbe représentative de la fonction u en justifiant la réponse.

2. Lorsque x représente un pourcentage de salariés, $u(x)$ et $v(x)$ représentent le pourcentage de la masse salariale que se partagent ces salariés dans leurs filiales respectives.

   Exemple : pour la courbe C, le point E(0,60 ; 0,3072) signifie que 60 % des salariés ayant les plus bas salaires se partagent 30,72 % de la masse salariale.

   2. a. Calculer le pourcentage de la masse salariale que se répartissent les 50 % des salariés de la filiale A ayant les plus bas salaires.

   2. b. Pour les 50 % des salariés ayant les plus bas salaires, laquelle des filiales, A ou B, distribue la plus grande part de la masse salariale ?

   2. c. Quelle filiale parait avoir une distribution des salaires la plus inégalitaire ?

3. Pour mesurer ces inégalités de salaires, on définit le coefficient de Gini associé à une fonction f modélisant la répartition des salaires, rangés en ordre croissant, par la formule :

$$c_f = 2\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

   3. a. Montrer que $c_u = 0,2$.

   3. b. En observant que $\dfrac{c_v}{2} = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x$, donner une interprétation graphique de $\dfrac{c_v}{2}$ en termes d' aires.

   3. c. En déduire que c_v est compris entre 0 et 1.

   3. d. Justifier l'inégalité $c_u \leqslant c_v$.

Corrections

Correction de l'exercice 5 : Polynésie sept. 2015

Étude de la répartition des salaires dans deux entreprises

Un cabinet d'audit a été chargé d'étudier la répartition des salaires dans deux filiales d'une entreprise, appelées A et B. Pour l'étude, les salaires sont classés par ordre croissant.

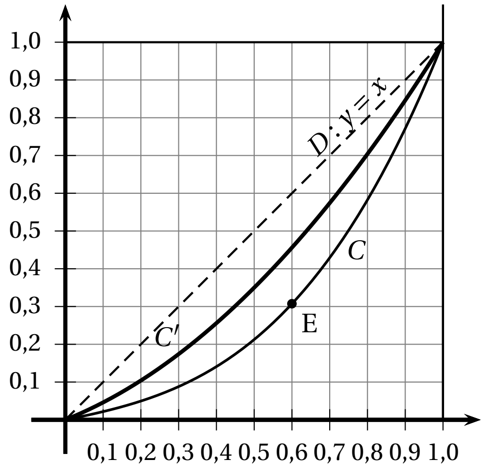
L*e cabinet d'audit a modélisé la répartition de salaires par la fonction u pour la filiale A et par la fonction v pour la filiale B. Les fonctions u et v sont définies sur l'intervalle [0 ; 1] par* :

$$u(x) = 0,6x^2 + 0,4x$$

et

$$v(x) = 0,7x^3 + 0,1x^2 + 0,2x$$

On a tracé ci-contre les courbes représentatives C et C′ des fonctions u et v.



1. **Déterminer la courbe représentative de la fonction u en justifiant la réponse.**
La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point E d'abscisse 0,6 ; graphiquement on voit que son ordonnée est approximativement de 0,3. Or on a :

- $u(0,6) = 0,6 \times 0,6^2 + 0,4 \times 0,6 = \underline{0,456}$;
- $v(0,6) = 0,7 \times 0,6^3 + 0,1 \times 0,6^2 + 0,2 \times 0,6 = \underline{0,3072}$.

Donc la courbe $\mathscr{C}$ est la représentation de la fonction v, et donc la courbe représentative de la fonction u est $\mathscr{C}'$. On a alors :

Filiale	A	B
Fonction	u	v
Courbe	$\mathscr{C}'$	$\mathscr{C}$

2. *Lorsque x représente un pourcentage de salariés, $u(x)$ et $v(x)$ représentent le pourcentage de la masse salariale que se partagent ces salariés dans leurs filiales respectives.*

2. a. Calculer le pourcentage de la masse salariale que se répartissent les 50 % des salariés de la filiale A ayant les plus bas salaires.
Pour avoir le pourcentage de la masse salariale que se répartissent les 50 % des salariés de la filiale A ayant les plus bas salaires, on calcule $u(0,5)$ que l'on exprimera en pourcentage.

$$u(0,5) = 0,6 \times 0,5^2 + 0,4 \times 0,5 = 0,35$$

Donc 50 % des salariés ayant les plus bas salaires dans la filiale A se partagent 35 % de la masse salariale.

2. b. Pour les 50 % des salariés ayant les plus bas salaires, laquelle des filiales, A ou B, distribue la plus grande part de la masse salariale ?

$$v(0,5) = 0,7 \times 0,5^3 + 0,1 \times 0,5^2 + 0,2 \times 0,5 = 0,2125$$

Donc 50 % des salariés ayant les plus bas salaires dans la filiale B se partagent 21,25 % de la masse salariale.

Donc pour les 50 % des salariés ayant les plus bas salaires, c'est la filiale A qui distribue la plus grande part de la masse salariale.

2. c. Quelle filiale parait avoir une distribution des salaires la plus inégalitaire ?
D'après la question précédente, c'est la filière B qui semble avoir une distribution des salaires la plus inégalitaire.

3. *Pour mesurer ces inégalités de salaires, on définit le coefficient de Gini associé à une fonction f modélisant la répartition des salaires, rangés en ordre croissant, par la formule :*

$$c_f = 2\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

3. a. Montrer que $c_u = 0,2$.
Une primitive U de la fonction u sur $[0; 1]$ est définie par :

$$U(x) = 0,6\frac{x^3}{3} + 0,4\frac{x^2}{2} = 0,2x^3 + 0,2x^2$$

$$\int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x = U(1) - U(0) = 0,4$$

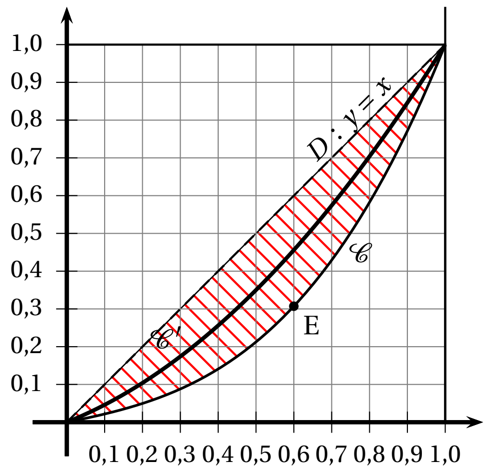
Donc $c_u = 2(0,5 - 0,4) = \underline{0,2}$

3. b. En observant que $\frac{c_v}{2} = \int_0^1 x\mathrm{d}x - \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x$, donner une interprétation graphique de $\frac{c_v}{2}$ en termes d' aires.

$c_v = 2\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x\right)$ donc $\frac{c_v}{2} = \frac{1}{2} - \int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x$

De plus, $\frac{1}{2}$ est la moitié de l'aire du carré de côté 1, donc c'est l'aire du domaine compris entre la droite d'équation $y = x$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$; autrement dit $\frac{1}{2} = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x$.

$\int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.



Donc $\frac{c_v}{2}$ représente l'aire du domaine hachuré sur le graphique ci-dessus.

3. c. En déduire que c_v est compris entre 0 et 1.
L'aire du domaine hachuré est plus petite que 0,5 donc $c_v \leq 1$. De plus, c_v représente une aire donc est positive : $0 \leq c_v \leq 1$.

3. d. Justifier l'inégalité $c_u \leqslant c_v$.

De la même manière, on prouverait que $\frac{c_u}{2}$ est égal à l'aire du domaine hachuré dans le graphique ci-contre.
En comparant les aires, on en déduit que :

$$\frac{c_u}{2} \leq \frac{c_v}{2}$$

et donc que

$$\boxed{c_u \leq c_v}$$