



Math93.com

TD n°1 - Terminale ES/L

Probabilités

Les exercices suivants sont tirés des épreuves du baccalauréat. Plus précisément, ils sont constitués de la première partie (sur deux) de ces exercices. Ceux dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD, beaucoup d'autres sont disponibles sur le site www.math93.com dans la rubrique Annales du Bac.

Exercice 1. Pondichery, 21 Avril 2016 (c)

On dispose des renseignements suivants à propos du baccalauréat session 2015 :

- 49 % des inscrits ont passé un baccalauréat général, 20 % un baccalauréat technologique et les autres un baccalauréat professionnel ;
- 91,5 % des candidats au baccalauréat général ont été reçus ainsi que 90,6 % des candidats au baccalauréat technologique.

Source : DEPP (juillet 2015)

On choisit au hasard un candidat au baccalauréat de la session 2015 et on considère les évènements suivants :

- G : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat général » ;
- T : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat technologique » ;
- S : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat professionnel » ;
- R : « Le candidat a été reçu ».

Pour tout évènement A , on note $P(A)$ sa probabilité et \bar{A} son évènement contraire.

De plus, si B est un autre évènement, on note $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B .

1. Préciser les probabilités $P(G)$, $P(T)$, $P_T(R)$ et $P_G(R)$.
2. Traduire la situation par un arbre pondéré. On indiquera les probabilités trouvées à la question précédente. Cet arbre pourra être complété par la suite.
3. Vérifier que la probabilité que le candidat choisi se soit présenté au baccalauréat technologique et l'ait obtenu est égale à 0,181 2.
4. Le ministère de l'Éducation Nationale a annoncé un taux global de réussite pour cette session de 87,8 % pour l'ensemble des candidats présentant l'un des baccalauréats.
 4. a. Vérifier que la probabilité que le candidat choisi se soit présenté au baccalauréat professionnel et l'ait obtenu est égale à 0,248 45.
 4. b. Sachant que le candidat s'est présenté au baccalauréat professionnel, déterminer la probabilité qu'il ait été reçu. On donnera une valeur approchée du résultat au millième.

Exercice 2. Métropole, 20 Juin 2016 (c)

Un téléphone portable contient en mémoire 3 200 chansons archivées par catégories : rock, techno, rap, reggae ... dont certaines sont interprétées en français.

Parmi toutes les chansons enregistrées, 960 sont classées dans la catégorie rock.

Une des fonctionnalités du téléphone permet d'écouter de la musique en mode « lecture aléatoire » : les chansons écoutées sont choisies au hasard et de façon équiprobable parmi l'ensemble du répertoire.

Au cours de son footing hebdomadaire, le propriétaire du téléphone écoute une chanson grâce à ce mode de lecture.

On note :

- R l'évènement : « la chanson écoutée est une chanson de la catégorie rock » ;
- F l'évènement : « la chanson écoutée est interprétée en français ».

1. Calculer $p(R)$, la probabilité de l'évènement R .
2. 35 % des chansons de la catégorie rock sont interprétées en français ; traduire cette donnée en utilisant les évènements R et F .
3. Calculer la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie rock et qu'elle soit interprétée en français.
4. Parmi toutes les chansons enregistrées 38,5 % sont interprétées en français.
Montrer que $p(F \cap \overline{R}) = 0,28$.
5. En déduire $p_{\overline{R}}(F)$ et exprimer par une phrase ce que signifie ce résultat.

Exercice 3. Polynésie, 10 Juin 2016 (c)

On s'intéresse à l'ensemble des demandes de prêts immobiliers auprès de trois grandes banques.

Une étude montre que 42 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Karl, 35 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Lofa, alors que cette proportion est de 23 % pour la banque Miro.

Par ailleurs :

- 76 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Karl sont acceptées ;
- 65 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Lofa sont acceptées ;
- 82 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Miro sont acceptées.

On choisit au hasard une demande de prêt immobilier parmi celles déposées auprès des trois banques.

On considère les évènements suivants :

- K : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Karl » ;
- L : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Lofa » ;
- M : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Miro » ;
- A : « la demande de prêt est acceptée ».

On rappelle que pour tout évènement E , on note $P(E)$ sa probabilité et on désigne par \overline{E} son évènement contraire.

Dans tout l'exercice on donnera, si nécessaire, des valeurs approchées au millième des résultats.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité que la demande de prêt soit déposée auprès de la banque Karl et soit acceptée.
3. Montrer que $P(A) \approx 0,735$.
4. La demande de prêt est acceptée. Calculer la probabilité qu'elle ait été déposée à la banque Miro.

Exercice 4. Liban, 31 mai 2016 (c)

Un centre de loisirs destiné aux jeunes de 11 ans à 18 ans compte 60 % de collégiens et 40 % de lycéens. Le directeur a effectué une étude statistique sur la possession de téléphones portables. Cette étude a montré que 80 % des jeunes possèdent un téléphone portable et que, parmi les collégiens, 70 % en possèdent un. On choisit au hasard un jeune du centre de loisirs et on s'intéresse aux évènements suivants :

- C : « le jeune choisi est un collégien » ;
- L : « le jeune choisi est un lycéen » ;
- T : « le jeune choisi possède un téléphone portable ».

Rappel des notations

Si A et B sont deux évènements, $p(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $p_B(A)$ désigne la probabilité de A sachant que l'évènement B est réalisé. On note aussi \bar{A} l'évènement contraire de A .

1. Donner les probabilités : $p(C)$, $p(L)$, $p(T)$, $p_C(T)$.
2. Faire un arbre de probabilités représentant la situation et commencer à le renseigner avec les données de l'énoncé.
3. Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien possédant un téléphone portable.
4. Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien sachant qu'il possède un téléphone portable.
5.
 5. a. Calculer $p(T \cap L)$, en déduire $p_L(T)$.
 5. b. Compléter l'arbre construit dans la question 2.

Exercice 5. Amérique du Nord, 1 Juin 2016 (c)

À une sortie d'autoroute, la gare de péage comporte trois voies. Une étude statistique a montré que :

- 28 % des automobilistes empruntent la voie de gauche, réservée aux abonnés ; un automobiliste empruntant cette voie franchit toujours le péage en moins de 10 secondes ;
- 52 % des automobilistes empruntent la voie du centre, réservée au paiement par carte bancaire ; parmi ces derniers, 75 % franchissent le péage en moins de 10 secondes ;
- les autres automobilistes empruntent la voie de droite en utilisant un autre moyen de paiement (pièces ou billets).

On choisit un automobiliste au hasard et on considère les évènements suivants :

- G : « l'automobiliste emprunte la voie de gauche » ;
- C : « l'automobiliste emprunte la voie du centre » ;
- D : « l'automobiliste emprunte la voie de droite » ;
- T : « l'automobiliste franchit le péage en moins de 10 secondes ».

On note \bar{T} l'évènement contraire de l'évènement T .

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation. Cet arbre sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
2. Calculer la probabilité $p(C \cap T)$.
3. L'étude a aussi montré que 70 % des automobilistes passent le péage en moins de 10 secondes.
 3. a. Justifier que $p(D \cap T) = 0,03$.
 3. b. Calculer la probabilité qu'un automobiliste empruntant la voie de droite passe le péage en moins de 10 secondes.

Exercice 6.

Une agence de location de voitures dispose de trois types de véhicules : berline, utilitaire ou luxe, et propose, au moment de la location, une option d'assurance sans franchise.

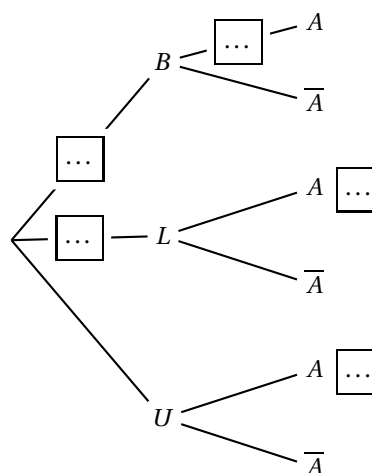
Une étude statistique a permis d'établir que :

- 30 % des clients ont loué une berline et 10 % ont loué un véhicule de luxe.
- 40 % des clients qui ont loué une berline ont choisi l'option d'assurance sans franchise.
- 9 % des clients ont loué un véhicule de luxe et ont choisi l'option d'assurance sans franchise.
- 21 % des clients ont loué un véhicule utilitaire et ont choisi l'option d'assurance sans franchise.

On prélève au hasard la fiche d'un client et on considère les évènements suivants :

- B : le client a loué une berline.
- L : le client a loué un véhicule de luxe.
- U : le client a loué un véhicule utilitaire.
- A : le client a choisi l'option d'assurance sans franchise.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre avec les données de l'énoncé.
2. Quelle est la probabilité que le client ait loué une berline et ait choisi l'option d'assurance sans franchise ?
3. Calculer la probabilité qu'un client ait choisi l'option d'assurance sans franchise.
4. Calculer $P_L(A)$, la probabilité que le client ait souscrit une assurance sans franchise sachant qu'il a loué une voiture de luxe.



Exercice 7.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir au millième.

À partir d'une étude statistique dans une chaîne de restaurants, on a modélisé le comportement des clients par :

- 60 % des clients sont des hommes ;
- 80 % des hommes mangent un dessert alors que seulement 45 % des femmes en mangent un.

On interroge au hasard un client de cette chaîne. On note :

- H l'évènement « le client interrogé est un homme » ;
- D l'évènement « le client interrogé a mangé un dessert ».

On note également :

- \bar{A} l'évènement contraire d'un évènement A ;
- $p(A)$ la probabilité d'un évènement A .

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le client interrogé soit un homme et ait mangé un dessert.
3. Montrer que $p(D) = 0,66$.
4. Le client interrogé affirme avoir pris un dessert. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

Correction des exercices

Correction de l'exercice 1 : Pondichéry, Avril 2016

- 49 % des inscrits ont passé un baccalauréat général, 20 % un baccalauréat technologique et les autres un baccalauréat professionnel et 91,5 % des candidats au baccalauréat général ont été reçus ainsi que 90,6 % des candidats au baccalauréat technologique.
- G : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat général » ; T : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat technologique » ; S : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat professionnel » ; R : « Le candidat a été reçu ».

1. Préciser les probabilités $P(G)$, $P(T)$, $P_T(R)$ et $P_G(R)$.

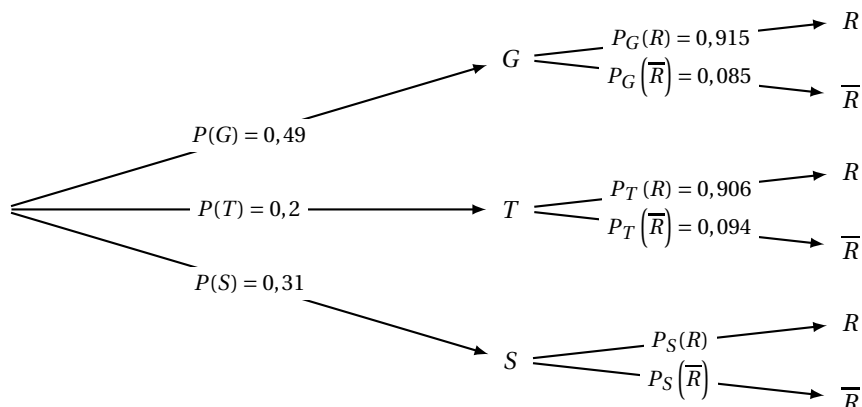
D'après les données on a :

- « 49 % des inscrits ont passé un baccalauréat général » donc : $P(G) = 0,49$;
- « 20 % des inscrits ont passé un baccalauréat technologique » donc : $P(T) = 0,2$;
- « 90,6 % des candidats au technologique ont été reçus » donc : $P_T(R) = 0,906$;
- « 91,5 % des candidats au baccalauréat général ont été reçus » donc : $P_G(R) = 0,915$;

2. Traduire la situation par un arbre pondéré. On indiquera les probabilités trouvées à la question précédente.

On a

$$P(S) = 1 - P(G) - P(T) = 1 - 0,49 - 0,2 = 0,31$$



3. Vérifier que la probabilité que le candidat choisi se soit présenté au bac techno et l'ait obtenu est égale à 0,1812.

On cherche la probabilité de l'évènement $(T \cap R)$ soit :

$$P(T \cap R) = P(T) \times P_T(R) = 0,2 \times 0,906 \implies P(T \cap R) = 0,1812$$

4. Le ministère de l'Éducation Nationale a annoncé un taux global de réussite pour cette session de 87,8 % pour l'ensemble des candidats présentant l'un des baccalauréats.

4. a. Vérifier que la probabilité que le candidat se soit présenté au bac professionnel et l'ait obtenu est 0,24845.

On cherche la probabilité de l'évènement $(S \cap R)$. Les évènements G , T et S forment une partition de l'univers donc d'après la propriété des probabilités totales on a :

$$P(R) = P(G \cap R) + P(T \cap R) + P(S \cap R)$$

Or d'après la question (3.) et le fait que le taux global de réussite pour cette session de $P(R) = 87,8\%$ on a :

$$\begin{aligned} 0,878 &= P(G) \times P_G(R) + 0,1812 + P(S \cap R) \\ 0,878 &= 0,49 \times 0,915 + 0,1812 + P(S \cap R) \\ P(S \cap R) &= 0,878 - 0,49 \times 0,915 - 0,1812 \end{aligned}$$

$$P(S \cap R) = 0,24845$$

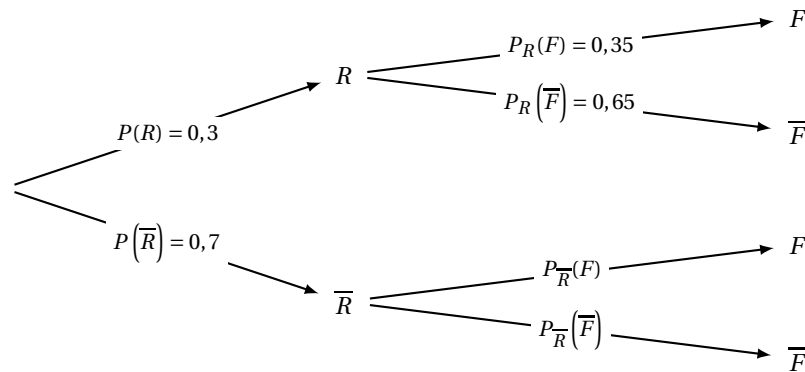
4. b. Sachant que le candidat s'est présenté au bac. professionnel, déterminer la probabilité qu'il ait été reçu. On donnera une valeur approchée du résultat au millième.

On a :

$$P_S(R) = \frac{P(S \cap R)}{P(S)} = \frac{0,24845}{0,31} \approx 0,801$$

Correction de l'exercice 2 : Métropole, Juin 2016

Au cours de son footing hebdomadaire, le propriétaire du téléphone écoute une chanson grâce à ce mode de lecture. On note : R l'événement : « la chanson écoutée est une chanson de la catégorie rock » et F l'événement : « la chanson écoutée est interprétée en français ».

1. Calculer $P(R)$, la probabilité de l'événement R .

Le téléphone portable contient en mémoire 3 200 chansons archivées par catégories : rock, techno, rap, reggae Parmi toutes les chansons enregistrées, 960 sont classées dans la catégorie rock.

Les chansons écoutées sont choisies au hasard et de façon équiprobable parmi l'ensemble du répertoire donc on est en condition d'équiprobabilité et :

$$P(R) = \frac{960}{3200} = 0,3$$

2. 35% des chansons de la catégorie rock sont en français ; traduire cette donnée en utilisant les événements R et F .

Cet événement se traduit avec les notations de l'exercice par :

$$P_R(F) = 0,35$$

3. Calculer la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie rock et qu'elle soit en français.

La probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie rock et qu'elle soit interprétée en français est donnée par :

$$P(R \cap F) = P(R) \times P_R(F) = 0,3 \times 0,35 = \underline{0,105}$$

Soit

$$P(R \cap F) = 0,105$$

4. Parmi toutes les chansons enregistrées 38,5% sont interprétées en français. Montrer que $P(F \cap \bar{R}) = 0,28$.

Parmi toutes les chansons enregistrées 38,5% sont interprétées en français donc $P(F) = 0,385$.

Les événements R et \bar{R} forment une partition de l'univers donc d'après la propriété des probabilités totales on a :

$$P(F) = P(R \cap F) + P(F \cap \bar{R})$$

$$0,385 = 0,105 + P(F \cap \bar{R})$$

Donc

$$P(F \cap \bar{R}) = 0,385 - 0,105 = 0,28$$

5. En déduire $P_{\bar{R}}(F)$ et exprimer par une phrase ce que signifie ce résultat.

Puisque $P(R) = 0,3$ on a $P(\bar{R}) = 1 - P(R) = 0,7$. On obtient alors aisément :

$$P_{\bar{R}}(F) = \frac{P(F \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{0,28}{0,7} = 0,4$$

Ce qui signifie que 40% des chansons qui ne sont pas de la catégorie Rock sont en français.

Correction de l'exercice 3 : Polynésie, Juin 2016

On considère les évènements suivants : K : « la demande a été déposée auprès de la banque Karl » ; L : « la demande a été déposée auprès de la banque Lofa » ; M : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Miro » ; A : « la demande de prêt est acceptée ». Dans tout l'exercice on donnera, si nécessaire, des valeurs approchées au millième des résultats.

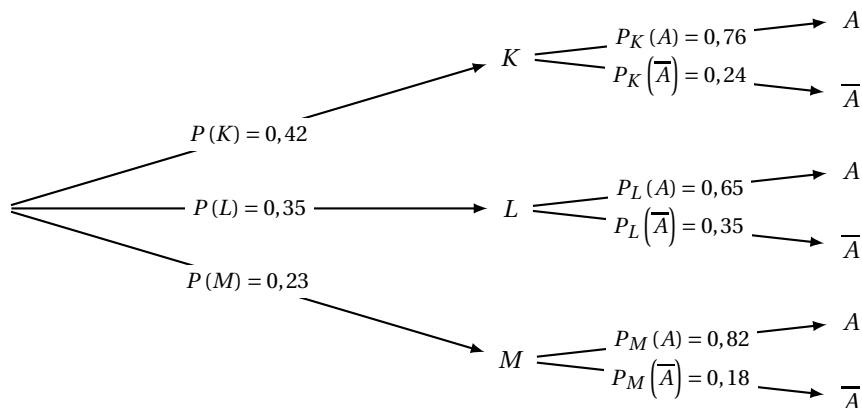
1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

- 42 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Karl, 35 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Lofa, alors que cette proportion est de 23 % pour la banque Miro. Donc

$$P(K) = 0,42 ; P(L) = 0,35 \text{ et } P(M) = 0,23$$

- 76 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Karl sont acceptées ; 65 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Lofa sont acceptées ; 82 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Miro sont acceptées donc :

$$P_K(A) = 0,76 ; P_L(A) = 0,65 \text{ et } P_M(A) = 0,82$$



2. Calculer la probabilité que la demande de prêt soit déposée auprès de la banque Karl et soit acceptée.

On cherche la probabilité de l'évènement $(K \cap A)$ or :

$$P(K \cap A) = P(K) \times P_K(A) = 0,42 \times 0,76 \approx \underline{0,319}$$

3. Montrer que $P(A) \approx 0,735$.

Les évènements K, L et M forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap K) + P(A \cap L) + P(A \cap M) \\ &= P(A \cap K) + P(L) \times P_L(A) + P(M) \times P_M(A) \\ P(A) &= 0,42 \times 0,76 + 0,35 \times 0,65 + 0,23 \times 0,82 \end{aligned}$$

$$P(A) \approx \underline{0,735}$$

4. La demande de prêt est acceptée. Calculer la probabilité qu'elle ait été déposée à la banque Miro.

Calculer la probabilité qu'elle ait été déposée à la banque Miro sachant que la demande de prêt est acceptée est :

$$P_A(M) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{P(M) \times P_M(A)}{P(A)} \approx \frac{0,23 \times 0,82}{0,735}$$

$$P_A(M) \approx \underline{0,257}$$

Correction de l'exercice 4 : Liban, 31 Mai 2016

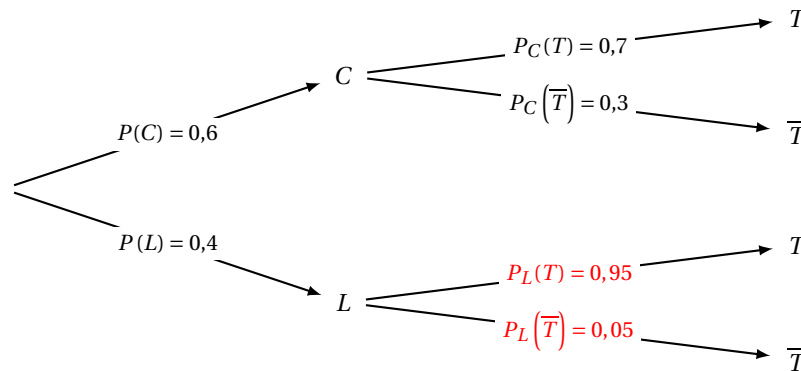
Un centre de loisirs destiné aux jeunes de 11 ans à 18 ans compte 60 % de collégiens et 40 % de lycéens. Le directeur a effectué une étude statistique sur la possession de téléphones portables. Cette étude a montré que 80 % des jeunes possèdent un téléphone portable et que, parmi les collégiens, 70 % en possèdent un. On choisit au hasard un jeune du centre de loisirs et on s'intéresse aux événements suivants :

- C : « le jeune choisi est un collégien » ;
- L : « le jeune choisi est un lycéen » ;
- T : « le jeune choisi possède un téléphone portable ».

1. Donner les probabilités : $p(C)$, $p(L)$, $p(T)$, $p_C(T)$.

- « Un centre de loisirs destiné aux jeunes de 11 ans à 18 ans compte 60 % de collégiens et 40 % de lycéens. » donc $p(C) = 0,6$ et $p(L) = 0,4$;
- « 80 % des jeunes possèdent un téléphone portable » donc $p(T) = 0,8$;
- « [...] parmi les collégiens, 70 % en possèdent un » donc $p_C(T) = 0,7$;

2. Faire un arbre de probabilités représentant la situation et commencer à le renseigner avec les données de l'énoncé.



3. Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien possédant un téléphone portable.

La probabilité que le jeune choisi soit un collégien possédant un téléphone portable est $p(C \cap T)$ soit :

$$p(C \cap T) = p(C) \times p_C(T) = 0,6 \times 0,7 = \underline{0,42}$$

4. Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien sachant qu'il possède un téléphone portable.

La probabilité que le jeune choisi soit un collégien sachant qu'il possède un téléphone portable est $p_T(C)$ soit :

$$p_T(C) = \frac{p(C \cap T)}{p(T)} = \frac{0,42}{0,8} = \underline{0,525}$$

5.

5. a. Calculer $p(T \cap L)$, en déduire $p_L(T)$.

Les événements C et L forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$p(T) = p(T \cap L) + p(T \cap C)$$

Soit

$$p(T \cap L) = p(T) - p(T \cap C)$$

$$p(T \cap L) = 0,8 - 0,42$$

Donc

$$p(T \cap L) = 0,38$$

En outre

$$p_L(T) = \frac{p(T \cap L)}{p(L)} = \frac{0,38}{0,4} = \underline{0,95}$$

5. b. Compléter l'arbre construit dans la question 2.

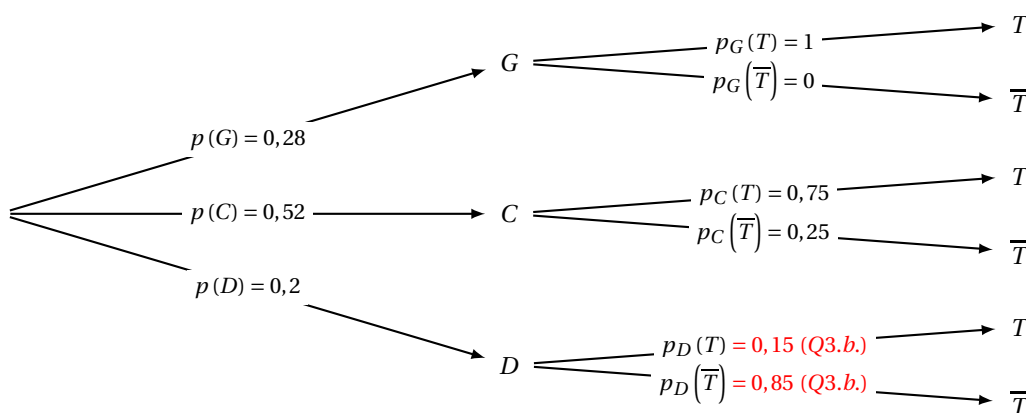
Correction de l'exercice 5 : Amérique du Nord, 1 Juin 2016

[...] 28 % des automobilistes empruntent la voie de gauche et ces derniers franchissent toujours le péage en moins de 10 secondes ; 52 % des automobilistes empruntent la voie du centre et parmi ceux-ci 75 % franchissent le péage en moins de 10 secondes ; les autres automobilistes empruntent la voie de droite.

On choisit un automobiliste au hasard et on considère les évènements suivants : G : « l'automobiliste emprunte la voie de gauche » ; C : « l'automobiliste emprunte la voie du centre » ; D : « l'automobiliste emprunte la voie de droite » ; T : « l'automobiliste franchit le péage en moins de 10 secondes ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation. Cet arbre sera complété au fur et à mesure de l'exercice.

- $p(G) = 0,28$ car « 28 % des automobilistes empruntent la voie de gauche » ;
- $p(C) = 0,52$ car « 52 % des automobilistes empruntent la voie du centre » ;
- Et donc $p(D) = 1 - 0,28 - 0,52 = 0,2$;
- $p_G(T) = 1$ car « ceux qui prennent la voie de gauche franchissent toujours le péage en moins de 10 secondes ». On a donc $p_G(\bar{T}) = 0$.
- $p_C(T) = 0,75$ car « 52 % des automobilistes empruntent la voie du centre et parmi ceux-ci 75 % franchissent le péage en moins de 10 secondes ». On a donc $p_C(\bar{T}) = 0,25$.



2. Calculer la probabilité $p(C \cap T)$.

$$p(C \cap T) = p(C) \times p_C(T) = 0,52 \times 0,75 = \underline{0,39}$$

3. L'étude a aussi montré que 70 % des automobilistes passent le péage en moins de 10 secondes.

3. a. Justifier que $p(D \cap T) = 0,03$.

Puisque 70 % des automobilistes passent le péage en moins de 10 secondes on a $p(T) = 0,7$ donc d'après la formule de probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(T) &= p(G \cap T) + p(C \cap T) + p(D \cap T) \\ 0,7 &= p(G) \times p_G(T) + 0,39 + p(D \cap T) \\ 0,7 &= 0,28 \times 1 + 0,39 + p(D \cap T) \end{aligned}$$

Donc

$$p(D \cap T) = 0,7 - 0,28 - 0,39 = \underline{0,03}$$

3. b. Calculer la probabilité qu'un automobiliste empruntant la voie de droite passe le péage en moins de 10 secondes.

La probabilité qu'un automobiliste empruntant la voie de droite passe le péage en moins de 10 secondes est :

$$p_D(T) = \frac{p(D \cap T)}{p(D)} = \frac{0,03}{0,2} = \underline{0,15}$$