



TD n°2 - Terminale ES/L

Loi Binomiale

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

Exercice 1. Liban 2017

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Dans cet exercice, on arrondira les résultats au millième

Une agence Pôle Emploi étudie l'ensemble des demandeurs d'emploi selon deux critères, le sexe et l'expérience professionnelle.

Cette étude montre que :

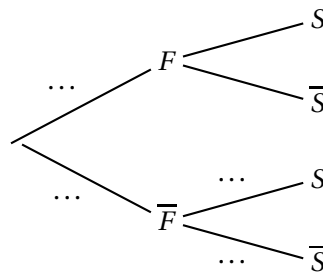
- 52 % des demandeurs d'emploi sont des femmes et 48 % sont des hommes ;
- 18 % des demandeurs d'emploi sont sans expérience et les autres sont avec expérience ;
- parmi les hommes qui sont demandeurs d'emploi, on sait que 17,5 % sont sans expérience.

Partie A

On prélève au hasard la fiche d'un demandeur d'emploi de cette agence. On note :

- S : l'évènement « le demandeur d'emploi est sans expérience » ;
- F : l'évènement « le demandeur d'emploi est une femme ».

1. Préciser $p(S)$ et $p_{\bar{F}}(S)$.
2. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les pointillés par les probabilités associées.



3. Démontrer que $p(\bar{F} \cap S) = 0,084$. Interpréter le résultat.
4. La fiche prélevée est celle d'un demandeur d'emploi sans expérience. Calculer la probabilité pour que ce soit un homme.
5. Sachant que la fiche prélevée est celle d'une femme, calculer la probabilité que ce soit la fiche d'un demandeur d'emploi sans expérience.

Partie B

La responsable de l'agence décide de faire le point avec cinq demandeurs d'emploi qui sont suivis dans son agence. Pour cela, elle prélève cinq fiches au hasard. On admet que le nombre de demandeurs d'emplois dans son agence est suffisamment grand pour assimiler cette situation à un tirage avec remise.

En justifiant la démarche, calculer la probabilité que, parmi les cinq fiches tirées au hasard, il y ait au moins une fiche de demandeur d'emploi sans expérience.

Réponses

(1.) 0,18 - 0,175 (4.) $\approx 0,467$ (5.) $\approx 0,185$ (B.) 0,629

Corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 2. (c) Antilles Septembre 2015

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Un supermarché dispose d'un stock de pommes. On sait que 40 % des pommes proviennent d'un fournisseur A et le reste d'un fournisseur B.

Il a été constaté que 85 % des pommes provenant du fournisseur A sont commercialisables. La proportion de pommes commercialisables est de 95 % pour le fournisseur B.

Le responsable des achats prend au hasard une pomme dans le stock. On considère les évènements suivants :

- A : « La pomme provient du fournisseur A ».
- B : « La pomme provient du fournisseur B ».
- C : « La pomme est commercialisable ».

Partie A

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
2. Montrer que la probabilité que la pomme ne soit pas commercialisable est 0,09.
3. La pomme choisie est non commercialisable. Le responsable des achats estime qu'il y a deux fois plus de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B. A-t-il raison?

Pour les parties B et C, on admet que la proportion de pommes non commercialisables est 0,09 et, quand nécessaire, on arrondira les résultats au millième.

Partie B

On prend au hasard 15 pommes dans le stock. Le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

1. Quelle est la probabilité que les 15 pommes soient toutes commercialisables?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 14 pommes soient commercialisables?

Réponses

(B.1.) ≈ 0.243 (B.2.) ≈ 0.604

Corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 3. Antilles Juin 2015**Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L**

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur sensibilité au développement durable et leur pratique du tri sélectif.

L'enquête révèle que 70 % des élèves sont sensibles au développement durable, et, parmi ceux qui sont sensibles au développement durable, 80 % pratiquent le tri sélectif.

Parmi ceux qui ne sont pas sensibles au développement durable, on en trouve 10 % qui pratiquent le tri sélectif. On interroge un élève au hasard dans le lycée. On considère les événements suivants :

- S : L'élève interrogé est sensible au développement durable.
- T : L'élève interrogé pratique le tri sélectif.

Les résultats seront arrondis à 10^{-2} .

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'élève interrogé soit sensible au développement durable et pratique le tri sélectif.
3. Montrer que la probabilité $P(T)$ de l'évènement T est 0,59.
4. On interroge un élève qui ne pratique pas le tri sélectif.
Peut-on affirmer que les chances qu'il se dise sensible au développement durable sont inférieures à 10 % ?
5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement.
Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves pratiquant le tri sélectif parmi les 4 élèves interrogés. Le nombre d'élèves de l'établissement est suffisamment grand pour que l'on considère que X suit une loi binomiale.
 5. a. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.
 5. b. Calculer la probabilité qu'aucun des quatre élèves interrogés ne pratique le tri sélectif.
 5. c. Calculer la probabilité qu'au moins deux des quatre élèves interrogés pratiquent le tri sélectif.

Réponses

(4.) $\approx 34\%$ (5.b.) 0,03 (5.c.) 0,81

Corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 4. Amérique Nord - 2 Juin 2015

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Les parties A et B sont indépendants.

Dans un grand collège, 20,3 % des élèves sont inscrits à l'association sportive.
 Une enquête a montré que 17,8 % des élèves de ce collège sont fumeurs.
 De plus, parmi les élèves non fumeurs, 22,5 % sont inscrits à l'association sportive.

On choisit au hasard un élève de ce collège. On note :

- S l'évènement « l'élève choisi est inscrit à l'association sportive » ;
- F l'évènement « l'élève choisi est fumeur ».

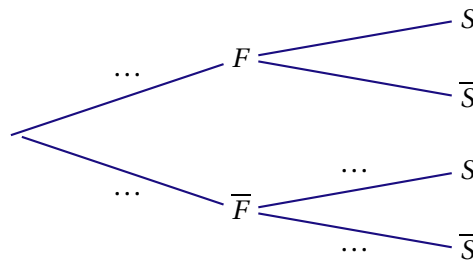
Rappel des notations :

Si A et B sont deux évènements, $p(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A et $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé. On note \bar{A} l'évènement contraire de A .

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millièmè.

Partie A

1. D'après les données de l'énoncé, préciser les valeurs des probabilités $p(S)$ et $p_{\bar{F}}(S)$.
2. Recopier l'arbre ci-dessous et remplacer chacun des quatre pointillés par la probabilité correspondante.



3. Calculer la probabilité de l'évènement $\bar{F} \cap S$ et interpréter le résultat.
4. On choisit au hasard un élève parmi ceux inscrits à l'association sportive. Calculer la probabilité que cet élève soit non fumeur.
5. On choisit au hasard un élève parmi les élèves fumeurs. Montrer que la probabilité que cet élève soit inscrit à l'association sportive est de 0,101.

Partie B

Une loterie, à laquelle tous les élèves du collège participent, est organisée pour la journée anniversaire de la création du collège. Quatre lots sont offerts. On admet que le nombre d'élèves est suffisamment grand pour que cette situation soit assimilée à un tirage avec remise.

On rappelle que 20,3 % de l'ensemble des élèves sont inscrits à l'association sportive.

En justifiant la démarche, calculer la probabilité que parmi les quatre élèves gagnants, il y ait au moins un qui soit inscrit à l'association sportive.

Réponses

(1.) 0,203 et 0,225 (3.) \approx 0,185 (4.) \approx 0,911 (B.) \approx 0,597.
 Le corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 5. (c) Métropole - Septembre 2013**Commun à tous les candidats**

Un opérateur de téléphonie mobile organise une campagne de démarchage par téléphone pour proposer la souscription d'un nouveau forfait à sa clientèle, composée à 65 % d'hommes.

Des études préalables ont montré que 30 % des hommes contactés écoutent les explications, les autres raccrochant aussitôt (ou se déclarant immédiatement non intéressés). Parmi les femmes, 60 % écoutent les explications.

On admet que ces proportions restent stables.

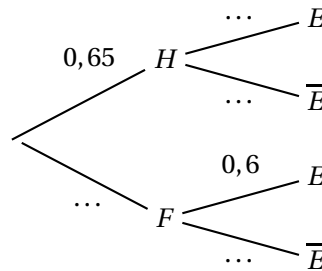
Partie A

On choisit au hasard une personne dans le fichier clients. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie. On note H l'évènement « la personne choisie est un homme », F l'évènement « la personne choisie est une femme », E l'évènement « la personne choisie écoute les explications du démarcheur » et \bar{E} l'évènement contraire de E .

Rappel des notations :

Si A et B sont deux évènements donnés, $P(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $P_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité proposé ci-dessous :



2. **2. a.** Traduire par une phrase l'évènement $E \cap F$ et calculer sa probabilité.
2. b. Montrer que la probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est égale à 0,405.
2. c. Le démarcheur s'adresse à une personne qui l'écoute. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ?
On donnera le résultat arrondi au centième.

Partie B

Les relevés réalisés au cours de ces premières journées permettent également de constater que 12 % des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait.

Chaque employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour.

On suppose le fichier suffisamment important pour que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
 2. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions un jour donné. (*On arrondira le résultat au centième*).
 3. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné. *On donnera une valeur arrondie au dix millième.*

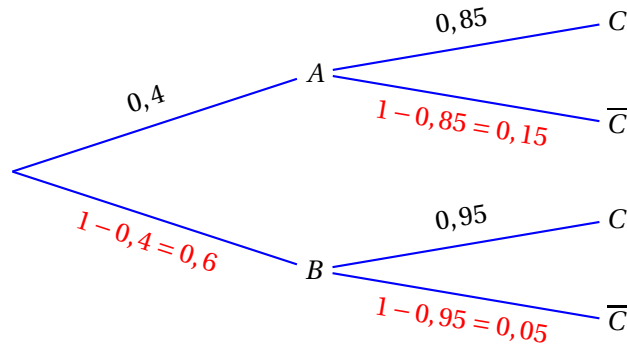
Corrections

Correction de l'exercice 2 : Antilles septembre 2015

PARTIE A

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.

On construit un arbre pondéré traduisant la situation :



2. Montrer que la probabilité que la pomme ne soit pas commercialisable est 0,09.

L'événement « la pomme n'est pas commercialisable » est l'événement \bar{C} .

Les événements A et B formant une partition de l'univers on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(\bar{C}) &= P(\bar{C} \cap A) + P(\bar{C} \cap B) \\
 &= P(A) \times P_A(\bar{C}) + P(B) \times P_B(\bar{C}) \\
 &= 0,4 \times 0,15 + 0,6 \times 0,05 \\
 &= 0,06 + 0,03 \\
 \underline{P(\bar{C})} &= \underline{0,09}
 \end{aligned}$$

3. La pomme choisie est non commercialisable. Le responsable des achats estime qu'il y a deux fois plus de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B. A-t-il raison?

Il s'agit, dans cette question, de comparer : $P_{\bar{C}}(A)$ et $P_{\bar{C}}(B)$.

$$\begin{cases} P_{\bar{C}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{0,06}{0,09} = \frac{2}{3} \\ P_{\bar{C}}(B) = \frac{P(B \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{0,03}{0,09} = \frac{1}{3} \end{cases} \implies \underline{P_{\bar{C}}(A) = 2 \times P_{\bar{C}}(B)}$$

Donc le responsable des achats a raison quand il dit qu'une pomme non commercialisable a deux fois plus de chance de provenir du fournisseur A que du fournisseur B.

Pour la parties B, on admet que la proportion de pommes non commercialisables est 0,09 et, quand nécessaire, on arrondira les résultats au millième.

PARTIE B

1. Quelle est la probabilité que les 15 pommes soient toutes commercialisables?

- **Modélisation.**

Méthode 1 (Rédaction type)

Il y a répétition de $n = 15$ événements indépendants et identiques (on tire une pomme).
Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :

- succès de probabilité $p = 0,91$ quand une pomme est commercialisable;
- et échec de probabilité $1 - p = 0,09$ sinon.

Donc la v.a. X qui est égale au nombre de succès au cours de ces $n = 15$ épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $p = 0,91$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,91$.

On peut écrire :

$$X \text{ suit } \mathcal{B}(15; 0,91) \text{ ou } X \sim \mathcal{B}(15; 0,91).$$

- **Calcul.**

Si la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p , alors pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

La probabilité que les 15 pommes soient toutes commercialisables est :

$$P(X = 15) = \binom{15}{15} \times 0,91^{15} \times 0,09^0 \approx \underline{0,243}$$

2. Quelle est la probabilité qu'au moins 14 pommes soient commercialisables?

- Méthode 1 :

La probabilité qu'au moins 14 pommes soient commercialisables est $P(X \geq 14)$ soit :

$$\begin{aligned} P(X \geq 14) &= P(X = 14) + P(X = 15) \\ &= \binom{15}{14} \times 0,91^{14} \times 0,09^1 + \binom{15}{15} \times 0,91^{15} \times 0,09^0 \\ &\approx 0,3605 + 0,2430 \\ P(X \geq 14) &\approx \underline{0,604} \end{aligned}$$

La probabilité qu'au moins 14 pommes soient commercialisables est d'environ 0,604.

- Méthode 2 :

On a : $P(X \geq 14) = 1 - P(X \leq 13) \approx \underline{0,604}$

On utilise alors la calculatrice directement.

Calculatrices

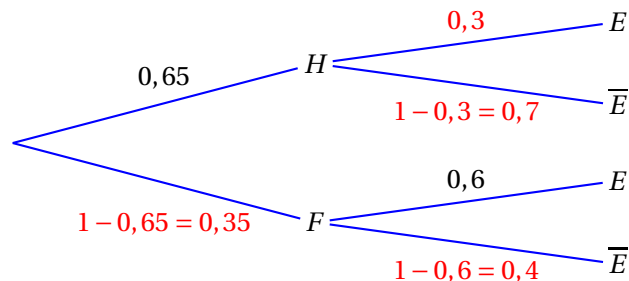
- Sur la TI Voyage 200 : $1 - \text{TStat.binomFdR}(15, 0,91, 13) \approx 0,604$
- Sur TI82/83+ : Menu Distrib $\Rightarrow 1 - \text{binomFrép}(15, 0,91, 13) \approx 0,604$
- Sur Casio 35+ ou 75 :
Menu Opt/STAT/DIST/DINM $\Rightarrow 1 - \text{binomialCD}(13, 15, 0,91) \approx 0,604$

Correction de l'exercice 5 : Métropole septembre 2013

Commun à tous les candidats

Partie A

1. L'arbre de probabilité correspondant aux données du problème est :



2. 2. a. Traduire par une phrase l'évènement $E \cap F$ et calculer sa probabilité.

L'évènement $E \cap F$ est « la personne choisie écoute les explications du démarcheur et est une femme. ». D'après les propriétés de l'arbre pondéré :

$$P(E \cap F) = P(F \cap E) = P(F) \times P_F(E) = 0,35 \times 0,6 = 0,21$$

2. b. La probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est $P(E)$.

Les événements H et F forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(H \cap E) + P(F \cap E) \\ &= P(H) \times P_H(E) + P(F) \times P_F(E) \\ &= 0,65 \times 0,3 + 0,35 \times 0,6 \\ &= 0,195 + 0,21 = \underline{0,405} \end{aligned}$$

2. c. Le démarcheur s'adresse à une personne qui l'écoute; la probabilité que ce soit un homme est $P_E(H)$.

$$P_E(H) = \frac{P(E \cap H)}{P(E)} = \frac{0,65 \times 0,3}{0,405} \approx \underline{0,48}$$

Partie B

Les relevés réalisés au cours de ces premières journées permettent également de constater que 12 % des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait. Chaque employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour. On suppose le fichier suffisamment important pour que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.**Méthode 2** (Rédaction type)

Il y a répétition de $n = 60$ événements indépendants et identiques (on tire une personne). Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :

- succès de probabilité $p = 0,12$ quand une personne a souscrit au nouveau forfait ;
- et échec de probabilité $1 - p = 0,88$ sinon.

Donc la v.a. X qui est égale au nombre de succès au cours de ces $n = 60$ épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $p = 0,12$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0,12$.

On peut écrire :

$$X \text{ suit } \mathcal{B}(60 ; 0,12) \text{ ou } X \sim \mathcal{B}(60 ; 0,12).$$

2. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions un jour donné. (On arrondira le résultat au centième).

La probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions est $P(X = 5)$.

Pour une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$ on sait que

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Donc

$$P(X = 5) = \binom{60}{5} 0,12^5 (1 - 0,12)^{60-5} \approx \underline{\underline{0,120}}$$

3. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné. On donnera une valeur arrondie au dix millième.

La probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné est $P(X \geq 1)$. Or on a :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$$

Or :

$$P(X = 0) = \binom{60}{0} 0,12^0 (1 - 0,12)^{60-0} \approx 0,0005$$

Donc

$$P(X \geq 1) \approx \underline{\underline{0,9995}}$$