



Math93.com

TD n°1 - Terminale ES/L

Probabilités à densité

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD. Les autres présentent des éléments de réponses et un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Applications directes du cours

Exercice 1. Loi uniforme

La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[5 ; 15]$.

1. Définir la fonction de densité de probabilité f de la loi de X .

2. Calculer $P(X < 10)$, $P(X < 13)$ et $P(10 < X < 13)$.

3. Calculer l'espérance de X

4. Déterminer u tel que $P(X < u) = 0,1$.

Réponses

(1.) $f(t) = \frac{1}{10}$ (2.) $P(X < 10) = 0,5$, $P(X < 13) = 0,8$ et $P(10 < X < 13) = 0,3$ (3.) $E(X) = 10$ (4.) $u = 6$

Exercice 2. Loi normale centrée réduite

Probabilité	$P(X \leq a)$ avec $a < 0$	$P(X \leq a)$ avec $a > 0$	$P(X \geq a)$ avec $a < 0$	$P(X \geq a)$ avec $a > 0$
Graphique				
Calcul	$0,5 - P(a < X < 0)$	$0,5 + P(0 < X \leq a)$	$0,5 + P(a \leq X < 0)$	$0,5 - P(0 < X < a)$

	Sur TI 83	Sur Casio
Menu	2nde puis sur la touche $\overset{\text{DISTR}}{\text{var}}$	OPTN puis STAT DIST NORM
$P(a \leq X \leq b)$	2 : normalFrep(a, b) ou normalCdf(a, b) borninf : a ; bornsup : b	Ncd normCD (a, b) Lower : a ; Upper : b
$P(X \leq k) = \alpha$	3 : FracNormale(α) ou invNorm(α) aire : α	InvN InvNormCD(α) Area : α

La variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

1. Déterminer l'espérance et l'écart-type σ de la variable X .

2. Vérifier à l'aide de la calculatrice, qu'arrondi au millième on obtient :

2. a. $P(0 < X < 2) \approx 0,477$

2. c. $P(0 < X < 1) \approx 0,341$

2. b. $P(-2 < X < 0) \approx 0,477$

2. d. $P(-1 < X < 0) \approx 0,341$.

3. En déduire sans calculatrice, en appliquant les propriétés du cours que :

a. $P(X < 1)$

b. $P(X > -1)$

c. $P(X < -2)$

d. $P(X > 2)$.

Réponses

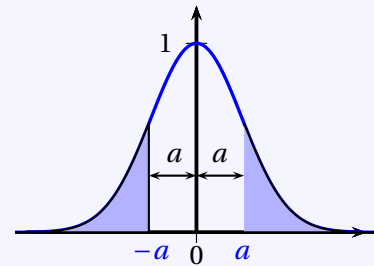
$P(X < 1) \approx 0,841$, $P(X > -1) \approx 0,841$, $P(X < -2) \approx 0,023$, $P(X > 2) \approx 0,023$.

Exercice 3. Loi normale centrée réduite, inverse

Propriété 1

Soit X une v.a. qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

1. La fonction Φ est définie sur \mathbb{R} par : $\Phi(t) = P(X \leq t)$.
2. Pour tout réel a on a :
 - (1) : $P(X \leq -a) = P(X \geq a)$
 - (2) : $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
 - (3) : $P(-a \leq X \leq a) = 2\Phi(a) - 1$



La variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

1. Déterminer a, b, c et d tels que :
 - a. $P(X < a) = 0,3$
 - b. $P(X > b) = 0,8$
 - c. $P(X < c) = 0,1$
 - d. $P(X > d) = 0,4$.
2. Déterminer u tel que $P(-u < X < u) = 0,6$.
3. Déterminer v tel que $P(-2v < X < 2v) = 0,3$.
4. Déterminer w tel que $P\left(-\frac{w}{2} < X < \frac{w}{2}\right) = 0,4$.

Réponses

$a \approx -0,524, b \approx -0,841, c \approx -1,28, d \approx 0,253, u \approx 0,842; v \approx 0,193$ et $w \approx 1,049$

Exercice 4. Loi normale centrée réduite et événements

La variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

On note A l'évènement : « $X > -0,3$ » et B l'évènement : « $X < 1$ ».

Calculer :

1. $P(A)$;
2. $P(B)$;
3. $P(A \cap B)$;
4. $P_A(B)$.

Réponses

$P(A) \approx 0,618, P(B) \approx 0,841, P(A \cap B) \approx 0,459, P_A(B) \approx 0,743$.

Exercice 5. Loi normale centrée réduite et courbes

Voici les courbes représentatives de la fonction de densité de la loi de la variable X qui suit une loi normale centrée réduite. On donne la valeur de l'aire colorée arrondie au millième, en déduire a, b, c et d .

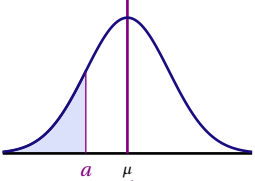
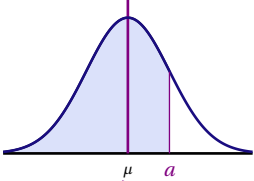
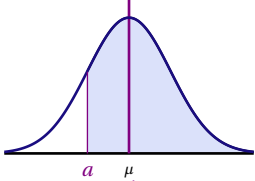
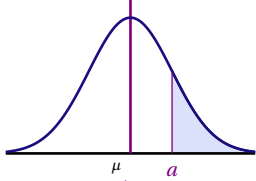
Valeur de l'aire colorée	$\mathcal{A}_1 \approx 0,309$	$\mathcal{A}_2 \approx 0,655$	$\mathcal{A}_3 \approx 0,579$	$\mathcal{A}_4 \approx 0,212$
Graphique				
Calcul	$a = \dots$	$b = \dots$	$c = \dots$	$d = \dots$

Réponses

$a \approx -0,5; b \approx 0,4; c \approx -0,2; d \approx 0,8$.

Exercice 6. Loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$: compétences de base

	Sur TI 83	Sur Casio
Menu	2nde puis sur la touche $\overset{\text{DISTR}}{\text{var}}$	OPTN puis $\boxed{\text{STAT}} \boxed{\text{DIST}} \boxed{\text{NORM}}$
$P(a \leq X \leq b)$	2:normalFrep(a, b, μ, σ) normalCdf(a, b, μ, σ) borninf : a ; bornsup : b puis, renseigner μ et σ	$\boxed{\text{Ncd}}$ normCD (a, b, σ, μ) Lower : a ; Upper : b puis, renseigner σ et μ
$P(X \leq k) = \alpha$	3:FracNormale(α, μ, σ) ou invNorm(α, μ, σ) aire : α puis, renseigner μ et σ	$\boxed{\text{InvN}}$ InvNormCD(α, σ, μ) Area : α puis, renseigner σ et μ

Probabilité	$P(X \leq a)$ avec $a < \mu$	$P(X \leq a)$ avec $a > \mu$	$P(X \geq a)$ avec $a < \mu$	$P(X \geq a)$ avec $a > \mu$
Graphique				
Calcul	$0,5 - P(a < X < \mu)$	$0,5 + P(\mu < X \leq a)$	$0,5 + P(a \leq X < \mu)$	$0,5 - P(\mu < X < a)$

La variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(100; 25)$.

- Déterminer l'espérance et l'écart-type σ de la variable X .
- Vérifier à l'aide de la calculatrice, qu'arrondi au millième on obtient :

2. a. $P(100 < X < 110) \approx 0,477$	2. c. $P(95 < X < 100) \approx 0,341$
2. b. $P(90 < X < 100) \approx 0,477$	2. d. $P(100 < X < 105) \approx 0,341$.
- En déduire sans calculatrice, en appliquant les propriétés du cours :

a. $P(X < 110)$	b. $P(X > 90)$	c. $P(X < 95)$	d. $P(X > 105)$.
------------------------	-----------------------	-----------------------	--------------------------
- Déterminer a, b, c et d tels que :

a. $P(X < a) = 0,3$	b. $P(X > b) = 0,8$	c. $P(X < c) = 0,85$	d. $P(X > d) = 0,4$.
----------------------------	----------------------------	-----------------------------	------------------------------

Réponses

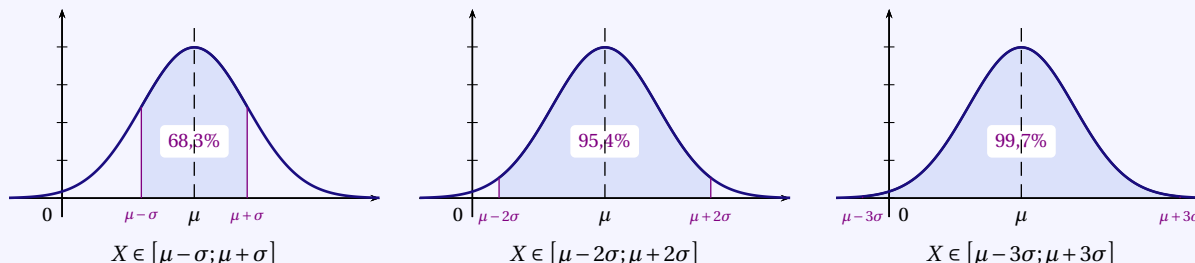
- (1.) $E(X) = 100; \sigma = 5$;
 (3.) $P(X < 110) \approx 0,977, P(X > 90) \approx 0,977, P(X < 95) \approx 0,159, P(X > 105) \approx 0,159$
 (4.) $a \approx 97,4; b \approx 95,8; c \approx 105$ et $d \approx 101$

Exercice 7. Loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ et propriété des $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$

Propriété 2 (dite des « $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$ »)

Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ alors :

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$.
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$.



1. Soit la variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne 225 et d'écart-type σ_1 . Déterminer σ_1 sachant que : $P(215 \leq X \leq 235) \approx 0,683$.
2. Soit la variable aléatoire Y qui suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart-type σ_2 . Déterminer σ_2 sachant que : $P(40 \leq Y \leq 60) \approx 0,954$.
3. Soit la variable aléatoire Y qui suit la loi normale de moyenne 7 et d'écart-type σ_3 . Déterminer σ_3 sachant que : $P(4 \leq X \leq 10) \approx 0,997$.

Réponses

$\sigma_1 = 10 ; \sigma_2 = 5 ; \sigma_3 = 1$

Exercice 8. (c) Loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$: utilisation d'un changement de variable

Définition 1

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ , signifie que la variable aléatoire $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$. On note : X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.

$$X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2) \iff Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0; 1)$$

1. La variable aléatoire X_1 suit la loi normale de moyenne $\mu_1 = 100$ et d'écart-type $\sigma_1 = 5$. Déterminer un intervalle I de centre $\mu_1 = 100$ tel que $P(X_1 \in I) = 0,75$.
Remarque : l'intervalle I est de la forme $[100 - a; 100 + a]$ donc on cherche un réel a tel que :

$$P(100 - a < X_1 < 100 + a) = 0,75$$

2. La variable aléatoire X_2 suit la loi normale de moyenne 35 et d'écart-type σ_2 . Déterminer σ_2 sachant que $P(X_2 < 37) \approx 0,748$, (arrondir à l'unité).
3. La variable aléatoire X_3 suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart-type σ_3 . Déterminer σ_3 sachant que $P(200 < X_3 < 300) = 0,789$, (arrondir au dixième).

Réponses

$a \approx 5,752, \sigma_2 \approx 3$ et $\sigma_3 \approx 40$

Corrections

Correction de l'exercice 8

1. La variable aléatoire X_1 suit la loi normale de moyenne $\mu_1 = 100$ et d'écart-type $\sigma_1 = 5$.

Déterminer un intervalle I de centre $\mu_1 = 100$ tel que $P(X_1 \in I) = 0,75$.

L'intervalle I est de la forme $[100 - a; 100 + a]$ donc on cherche un réel a tel que :

$$P(100 - a < X_1 < 100 + a) = 0,75$$

Or on a en soustrayant par $\mu_1 = 100$ chaque terme et en divisant par l'écart-type $\sigma_1 = 5$:

$$\begin{aligned} P(100 - a < X_1 < 100 + a) = 0,75 &\iff P\left(\frac{100 - a - 100}{5} < \frac{X_1 - 100}{5} < \frac{100 + a - 100}{5}\right) = 0,75 \\ &\iff P\left(-\frac{a}{5} < \frac{X_1 - 100}{5} < \frac{a}{5}\right) = 0,75 \end{aligned}$$

Or par définition :

$$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2) \iff Y_1 = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0; 1)$$

En outre :

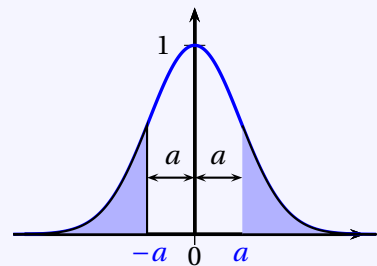
Propriété 3

Soit X une v.a. qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

1. a. La fonction Φ est définie sur \mathbb{R} par : $\Phi(t) = P(X \leq t)$.

1. b. Pour tout réel a on a :

- (1) : $P(X \leq -a) = P(X \geq a)$
- (2) : $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
- (3) : $P(-a \leq X \leq a) = 2\Phi(a) - 1$



De ce fait, d'après la propriété 6 :

$$\begin{aligned} P(100 - a < X_1 < 100 + a) = 0,75 &\iff P\left(-\frac{a}{5} < Y_1 < \frac{a}{5}\right) = 0,75 \quad \text{où } Y_1 = \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \sim \mathcal{N}(0; 1) \\ &\iff 2\Phi\left(\frac{a}{5}\right) - 1 = 0,75 \\ &\iff \Phi\left(\frac{a}{5}\right) = \frac{1 + 0,75}{2} \end{aligned}$$

La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à 10^{-3} près :

$$\Phi\left(\frac{a}{5}\right) = \frac{1 + 0,75}{2} \iff \frac{a}{5} \approx 1,150$$

Donc $a \approx 5,752$ et l'intervalle cherché est donc :

$$I = [100 - a; 100 + a] \approx [94,25; 105,75]$$

Calculatrices

- Sur la TI Voyage 200 : $TIStat.invNorm(0.75, 0, 1) \approx 1,150$
- Sur TI82/83+ : $invNorm(0.75, 0, 1)$ ou (fr.) $FracNormale(0.75, 0, 1)$
- Sur Casio 35+ ou 75 : $Menu STAT/DIST/NORM/InvN \Rightarrow InvNormCD(0.75, 1, 0)$

2. La variable aléatoire X_2 suit la loi normale de moyenne 35 et d'écart-type σ_2 .

Déterminer σ_2 sachant que $P(X_2 < 37) \approx 0,748$.

On cherche l'écart-type σ_2 tel que : $P(X_2 < 37) \approx 0,748$ quand X_2 suit la loi normale de moyenne 35 et d'écart-type σ_2 .

Or on a en soustrayant par $\mu_2 = 35$ chaque terme et en divisant par l'écart-type $\sigma_2 > 0$:

$$P(X_2 < 37) \approx 0,748 \iff P\left(\frac{X_2 - 35}{\sigma_2} < \frac{37 - 35}{\sigma_2}\right) \approx 0,748$$

$$\iff P\left(\frac{X_2 - 35}{\sigma_2} < \frac{2}{\sigma_2}\right) \approx 0,748$$

Or par définition :

$$X_2 \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2) \iff Y_2 = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0; 1)$$

En outre :

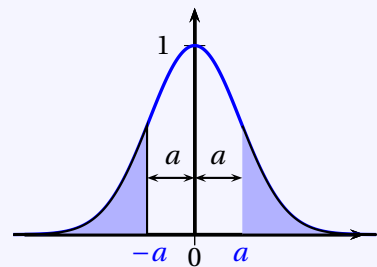
Propriété 4

Soit X une v.a. qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

2. a. La fonction Φ est définie sur \mathbb{R} par : $\Phi(t) = P(X \leq t)$.

2. b. Pour tout réel a on a :

- (1) : $P(X \leq -a) = P(X \geq a)$
- (2) : $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
- (3) : $P(-a \leq X \leq a) = 2\Phi(a) - 1$



De ce fait, d'après la propriété 6 :

$$P\left(\frac{X_2 - 35}{\sigma_2} < \frac{2}{\sigma_2}\right) \approx 0,748 \iff P\left(Y_2 < \frac{2}{\sigma_2}\right) = 0,748 \quad \text{où } Y_2 = \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} \sim \mathcal{N}(0; 1)$$

$$\iff \Phi\left(\frac{2}{\sigma_2}\right) = 0,748$$

La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à 10^{-3} près :

$$\Phi\left(\frac{2}{\sigma_2}\right) = 0,748 \iff \frac{2}{\sigma_2} \approx 0,668 \iff \sigma_2 \approx \frac{2}{0,668} \approx 3$$

Donc $\underline{\sigma_2 \approx 3}$.

Calculatrices

- Sur la TI Voyage 200 : $TIStat.invNorm(0.748, 0, 1) \approx \underline{0,668}$
- Sur TI82/83+ : $invNorm(0.748, 0, 1)$ ou (fr.) $FracNormale(0.748, 0, 1)$
- Sur Casio 35+ ou 75 : $Menu STAT/DIST/NORM/InvN \Rightarrow InvNormCD(0.748, 1, 0)$

3. La variable aléatoire X_3 suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart-type σ_3 .

Déterminer σ_3 sachant que $P(200 < X_3 < 300) = 0,789$.

Propriété 5

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.

La variable aléatoire X_3 suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma_3^2)$ si et seulement si, la variable aléatoire $Y_3 = \frac{X_3 - \mu}{\sigma_3}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

Donc ici, puisque X_3 suit la loi normale $\mathcal{N}(250; \sigma_3^2)$, la v.a. $Y_3 = \frac{X_3 - 250}{\sigma_3}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

On cherche ici une valeur approchée à 10^{-1} de σ_3 sachant que $P(200 \leq X_3 \leq 300) = 0,789$, or :

$$P(200 \leq X_3 \leq 300) = 0,789 \iff P\left(\frac{200 - 250}{\sigma_3} \leq \frac{X_3 - 250}{\sigma_3} \leq \frac{300 - 250}{\sigma_3}\right) = 0,789$$

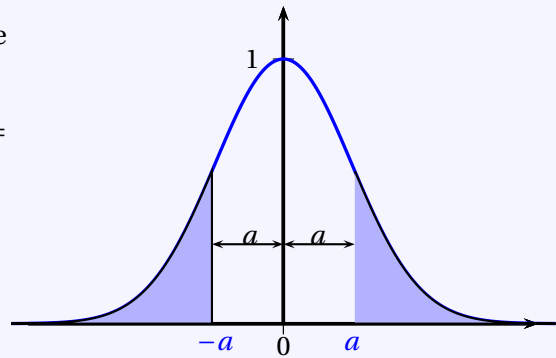
$$\iff P\left(\frac{-50}{\sigma_3} \leq Y_3 \leq \frac{50}{\sigma_3}\right) = 0,789$$

Or la v.a. Z suit la loi normale centrée réduite et on rappelle que :

Propriété 6

Soit Y_3 une v.a. qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

- La fonction Φ est définie sur \mathbb{R} par $\Phi(t) = P(Y_3 \leq t)$.
- Pour tout réel a on a :
 - (1) : $P(Y_3 \leq -a) = P(Y_3 \geq a)$
 - (2) : $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
 - (3) : $P(-a \leq Y_3 \leq a) = 2\Phi(a) - 1$



De ce fait en appliquant la relation (3) de la propriété 6 :

$$P(200 \leq X_3 \leq 300) = 0,789 \iff P\left(\frac{-50}{\sigma_3} \leq Y_3 \leq \frac{50}{\sigma_3}\right) = 0,789$$

$$\iff 2\Phi\left(\frac{50}{\sigma_3}\right) - 1 = 0,789$$

$$\iff \Phi\left(\frac{50}{\sigma_3}\right) = \frac{0,789 + 1}{2} = 0,8945$$

$$\iff P\left(Y_3 \leq \frac{50}{\sigma_3}\right) = 0,8945$$

La calculatrice nous donne alors avec la fonction répartition normale réciproque :

$$Y_3 \sim \mathcal{N}(0; 1) \implies \frac{50}{\sigma_3} \approx 1,25082$$

Soit arrondi à 10^{-1} près :

$$\boxed{\sigma_3 \approx 40,0}$$

Calculatrices

- Sur la TI Voyage 200 : $TIStat.invNorm(0,8945, 0, 1) \approx \underline{1,25082}$
- Sur TI82/83+ : $invNorm(0,8945, 0, 1)$ ou (fr.) $FracNormale(0,8945, 0, 1)$
- Sur Casio 35+ ou 75 : $Menu STAT/DIST/NORM/InvN \Rightarrow InvNormCD(0,8945, 1, 0)$