Math93.com

TD n°2 - Terminale ES/L
Probabilités à densité

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD. Les autres présentent des éléments de réponses et un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Loi uniforme

Exercice 1. (c) Antilles juin 2016

Une agence de location de voitures dispose de trois types de véhicules : berline, utilitaire ou luxe, et propose, au moment de la location, une option d'assurance sans franchise.
Le temps d'attente au guichet de l'agence de location, exprimé en minutes, peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1\,;\ 20]$.

1. Quelle est la probabilité d'attendre plus de douze minutes ?
2. Préciser le temps d'attente moyen.

Exercice 2. D'après Nouvelle Calédonie, Mars 2016

Les 275 passagers d'un vol long-courrier s'apprêtent à embarquer dans un avion possédant 55 sièges en classe confort et 220 sièges en classe économique.
Un passager du vol est choisi au hasard et on note T la durée (en minutes] qui s'est écoulée entre le début des enregistrements des bagages et l'arrivée de ce passager au comptoir d'enregistrement.
On admet que T est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;\ 120]$.
Déterminer la probabilité que le passager choisi enregistre ses bagages dans les 30 dernières minutes autorisées.

Réponses
0,25

Exercice 3. D'après Nouvelle Calédonie, Novembre 2015

Pierre a pris rendez-vous dans une fabrique de jus de pomme artisanale. Il arrive au hasard entre 8 heures et 9 heures 30 minutes. Son heure d'arrivée est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[8\,;\ 9{,}5]$. Déterminer la probabilité que Pierre arrive entre 8 h 30 et 8 h 45.

Réponses
$\dfrac{1}{6}$

Loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$

Exercice 4. D'après Pondichéry, Avril 2017

Un marathon est une épreuve sportive de course à pied. Dans cet exercice, tous les résultats approchés seront donnés à 10^{-3} près. On suppose que le temps en minutes mis par un marathonien pour finir le marathon de Tartonville est modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart type $\sigma = 39$.

1. Calculer $P(210 \leqslant T \leqslant 270)$.

2. Un coureur est choisi au hasard parmi les coureurs qui ont mis entre 210 minutes et 270 minutes pour finir le marathon.

Calculer la probabilité que ce coureur ait terminé la course en moins de 240 minutes.

3.

3. a. Calculer $P(T \leqslant 300)$.

3. b. Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel t, arrondi à l'unité, vérifiant $P(T \geqslant t) = 0,9$.

3. c. Interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.

> **Réponses**
> *(1.) 0,543 ; (2.) 0,453 ; (3.a.) 0,9 ; (3.b.)* $t \approx 200$
> *Le corrigé détaillé sur www.math93.com*

Exercice 5. (c) D'après Amérique du Nord 2013

Une étude interne à une grande banque a montré qu'on peut estimer que l'âge moyen d'un client demandant un crédit immobilier est une variable aléatoire, notée X, qui suit la loi normale de moyenne $40,5$ et d'écart type 12. *Dans cet exercice, les résultats seront donnés à* 10^{-3} *près.*

1. Calculer la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans.

2. Calculer la probabilité que le client n'ait pas demandé un prêt immobilier avant 55 ans.

> **Réponses**
> *0,133 et 0,113*

Exercice 6. D'après Nouvelle Calédonie, Mars 2017

À l'occasion de la fête des Mères, un fleuriste décide de proposer à ses clients plusieurs types de bouquets spéciaux. L'un des fournisseurs du fleuriste est un jardinier spécialisé dans la production d'une espèce de rosiers nommée « Arlequin ».
On note X la variable aléatoire qui, à chaque rosier de cette espèce pris au hasard, cultivé chez ce jardinier, associe sa hauteur exprimée en centimètres. On admet, d'après les observations et mesures réalisées, que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 3$.

1. On choisit au hasard un rosier « Arlequin » chez ce fournisseur.

1. a. Déterminer la probabilité que ce rosier mesure entre 47 et 53 centimètres.

1. b. Déterminer la probabilité que ce rosier mesure plus de 56 centimètres.

2. Le fournisseur veut prévoir quelle sera la hauteur atteinte ou dépassée par 80 % de ses rosiers « Arlequin ».

Déterminer la hauteur cherchée (on l'arrondira au mm).

> **Réponses**
> *(1.a.) 0,683 ; (1.b.) 0,023 ; (2.) 0,9* $k \approx 47,5$. *Le corrigé détaillé sur www.math93.com*

Exercice 7. (c)D'après Asie, Juin 2016

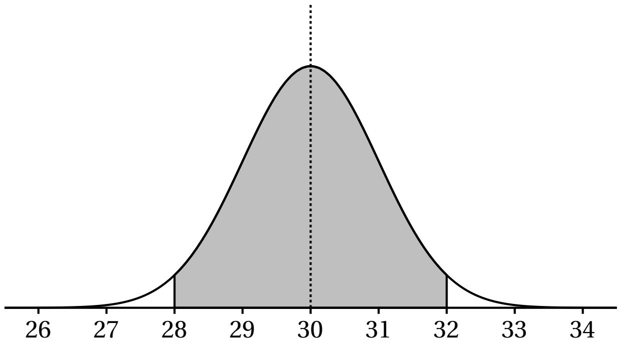
Une entreprise produit en grande série des clés USB pour l'industrie informatique.
Une clé est dite conforme pour la lecture lorsque sa vitesse de lecture, exprimée en Mo/s, appartient à l'intervalle [98 ; 103]. Une clé est dite conforme pour l'écriture lorsque sa vitesse d'écriture exprimée en Mo/s appartient à l'intervalle [28 ; 33].

1. On note R la variable aléatoire qui, à chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse de lecture. On suppose que la variable aléatoire R suit la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$.

Calcule la probabilité qu'une clé soit conforme pour la lecture.

2. On note W la variable aléatoire qui, chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse d"écriture On suppose que la variable aléatoire W suit une loi normale.

Le graphique ci-après représente la densité de probabilité de la variable aléatoire W.



L'unité d'aire est choisie de façon à ce que l'aire sous la courbe soit égale à un et l'aire grisée est environ égale à 0,95 unité d'aire. La droite d'équation $x = 30$ est un axe de symétrie de la courbe.

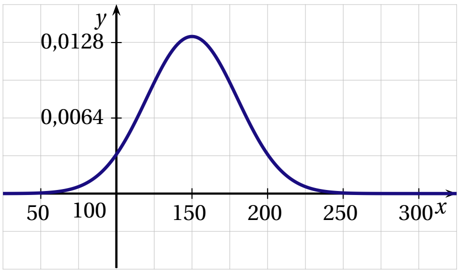
Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire W. Justifier.

Réponses
(1.) 0,976 ; (2.) $\mu = 30$ *et* $\sigma = 1$

Exercice 8. D'après Polynésie, 7 juin 2013

On s'intéresse à une espèce de poissons présente dans deux zones différentes (zone 1 et zone 2) de la planète.

Partie A. Étude de la zone 1

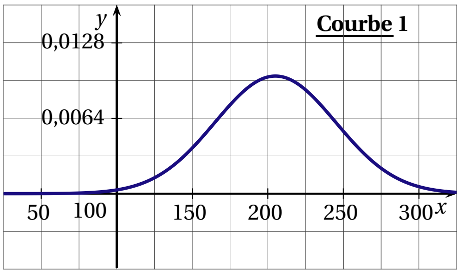


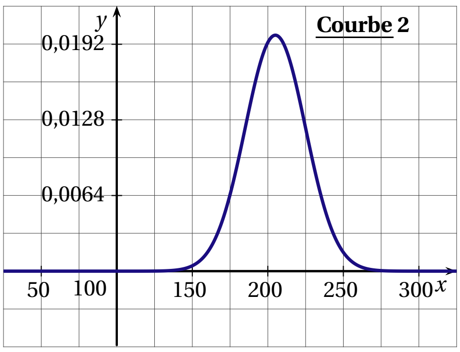
On note X la variable aléatoire qui à chaque poisson observé dans la zone 1 associe sa taille en cm.
Une étude statistique sur ces poissons de la zone 1 a montré que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type $\sigma = 30$. La courbe de la densité de probabilité associée à X est représentée ci-contre.

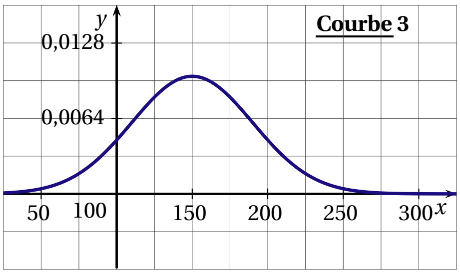
1. Par lecture graphique, donner la valeur de μ.
2. On pêche un de ces poissons dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, d'avoir un poisson dont la taille est comprise entre 150 cm et 210 cm.
3. Un poisson de cette espèce de la zone 1 est considéré comme adulte quand il mesure plus de 120 cm.
   On pêche un poisson de l'espèce considérée dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, de pêcher un poisson adulte.
4. On considère un nombre k strictement plus grand que la valeur moyenne μ.
   Est-il vrai que $P(X < k) < 0,5$? Justifier.

Partie B. Étude de la zone 2

Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque poisson de l'espèce considérée de la zone 2, associe sa taille en cm. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne $\mu' = 205$ et d'écart type $\sigma' = 40$.
En comparant avec le graphique de la zone 1 donné à la question 1 qui représente une loi normale d'écart type $\sigma = 30$, dire laquelle des trois courbes ci-dessous représente la densité de probabilité de la variable aléatoire Y.
Justifier la réponse.







Réponses
(1.) 150; (2.) 0,48; (3.) 0,84; (4.) Faux; (B.) Courbe 1
Le corrigé détaillé sur www.math93.com

Corrections

Correction de l'exercice 1 : Antilles Juin 2016

Le temps d'attente au guichet de l'agence de location, exprimé en minutes, peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [1 ; 20].

Propriété 1

Soit X la variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle [a; b].

$$\boxed{\forall x \in [a\,;\,b]\,;\, P(a \leq X \leq x) = \frac{x-a}{b-a} \quad : \ (1)} \quad \text{et} \quad \boxed{E(X) = \frac{b+a}{2} \quad : \ (2)}$$

1. **Quelle est la probabilité d'attendre plus de douze minutes ?**
La probabilité d'attendre plus de 12 minutes est :

$$P(T \geqslant 12) = P(12 \leq T \leq 20) = \frac{20-12}{20-1} = \frac{8}{19} \approx \underline{0,42}$$

2. **Préciser le temps d'attente moyen.**
Le temps d'attente moyen est $\dfrac{1+20}{2} = \underline{10,5\,\text{min}}$.

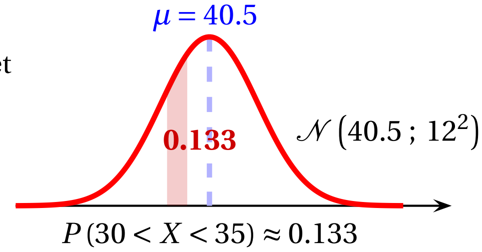
Correction de l'exercice 5

Une étude interne à une grande banque a montré qu'on peut estimer que l'âge moyen d'un client demandant un crédit immobilier est une variable aléatoire, notée X, qui suit la loi normale de moyenne $40,5$ et d'écart type 12.

1. **Calculer la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans.**

La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 40.5$ et d'écart-type $\sigma = 12$. La calculatrice nous donne à 10^{-3} près :

$$X \sim \mathcal{N}\left(40.5\,;\,12^2\right) \Longrightarrow P(30 < X < 35) \approx \underline{0,133}$$



> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*(30 , 35 , 40.5 , 12) ≈ $\underline{0{,}132\,570}$
> - *Sur TI82/83+ : normalcdf*(30 , 35 , 40.5 , 12) *ou (fr.) normalfrép*(30 , 35 , 40.5 , 12)
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* ⇒ *NormCD*(30 , 35, 12 , 40.5)

2. **Calculer la probabilité que le client n'ait pas demandé un prêt immobilier avant 55 ans.**

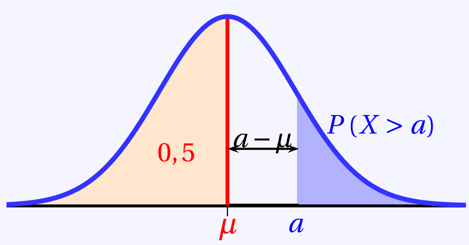
Propriété 2 ($P(X > a)$; $a > \mu$)

Si la variable X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

$$P\left(X < \mu\right) = 0,5 = P\left(X > \mu\right)$$

De plus pour tout réel a avec $a > \mu$:

$$\boxed{P(X > a) = 0,5 - P\left(\mu < X < a\right)}$$



On cherche ici $P(X \geq 55)$ or d'après la propriété on a :

$$P(X \geq 55) = 0,5 - P(40,5 < X < 55) \approx 0,113$$

la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans est d'environ $\underline{0,113}$.

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 :* $\left(0,5 -\right.$ *TIStat.normFDR*$\left.(40,5\ ,\ 55\ ,\ 40.5\ ,\ 12)\right) \approx \underline{0,113\,460}$
> - *Sur TI82/83+ : normalcdf*(40,5 , 55 , 40.5 , 12) *ou (fr.) normalfrép*(40,5 , 55 , 40.5 , 12)
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd ⇒ NormCD*(40,5 , 55, 12 , 40.5)

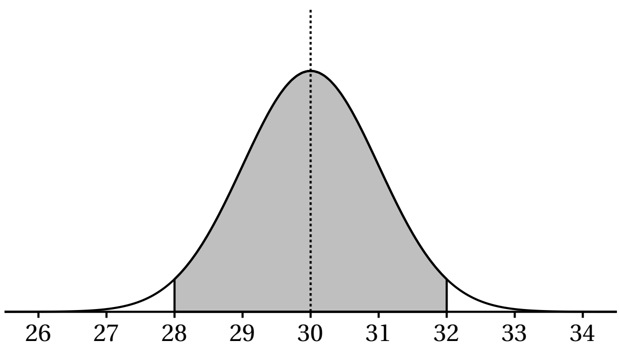
Correction de l'exercice 7 : Asie juin 2016

Une clé est dite conforme pour la lecture lorsque sa vitesse de lecture, exprimée en Mo/s, appartient à l'intervalle [98; 103]. Une clé est dite conforme pour l'écriture lorsque sa vitesse d'écriture exprimée en Mo/s appartient à l'intervalle [28; 33].

1. **On note R la variable aléatoire qui, à chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse de lecture. On suppose que la variable aléatoire R suit la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Calculer la probabilité qu'une clé soit conforme pour la lecture.**
   Une clé est conforme pour la lecture quand $98 \leq R \leq 103$, sachant que la variable aléatoire R suit la loi normale de paramètres $\mu = 100$ et $\sigma = 1$.

   La calculatrice donne $p(98 \leq X \leq 103) \approx \underline{0,976}$.

2. **On note W la variable aléatoire qui, chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse d"écriture On suppose que la variable aléatoire W suit une loi normale. Le graphique ci-après représente la densité de probabilité de la variable aléatoire W.**



L'unité d'aire est choisie de façon à ce que l'aire sous la courbe soit égale à un et l'aire grisée est environ égale à 0,95 unité d'aire. La droite d'équation $x = 30$ est un axe de symétrie de la courbe. Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire W. Justifier.

La fonction densité d'une loi normale d'espérance μ est représentée par une courbe en cloche dont l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = \mu$. On sait que la droite d'équation $x = 30$ est axe de symétrie donc on peut en déduire que $\underline{\mu = 30}$.

D'après le cours, pour toute variable aléatoire W suivant une loi normale de paramètres μ et σ, on sait que :

$$p(\mu - 2\sigma \leq W \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$$

D'après le texte, $p(28 \leq W \leq 32) \approx 0,95$ et on sait que $\mu = 30$;

$$\left\{\begin{array}{l} p(30 - 2\sigma \leq W \leq 30 + 2\sigma) \approx 0,95 \\ p(28 \leq W \leq 32) \approx 0,95 \end{array}\right. \Longrightarrow \underline{\sigma = 1}$$