Math93.com

TD n°1 - Terminale ES/L
Les suites

Exercice 1. Suites géométriques et somme

Remarque : Cet exercice est similaire à l'exercice corrigé 76 p 23 du Bordas (Colletion indice).

Soit n un entier naturel supérieur à 4 et S_n la somme des premiers termes d'une suite géométrique que l'on exhibera :

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

1. Montrer que pour tout entier n supérieur à 4 :

$$S_n = \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

2. Montrer que la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$ est $\frac{3}{2}$.

On a donc montré que :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

3. On suppose trivial le fait que la suite (S_n) soit croissante. En utilisant la calculatrice, déterminer le plus petit entier n_0 tel que si $n > n_0$ alors $1{,}49999 < S_n < 1{,}5$.

Réponses

(3.) : $n_0 = 11$.

Exercice 2. Suites géométriques et somme

En vous inspirant de l'exercice 1 :

1. Montrer que :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{4}{3}$$

2. Montrer que :

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{5}{4}$$

3. Montrer que :

$$1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{11^3} + \frac{1}{11^4} + \cdots = 1{,}1$$

4. Soit q un réel tel que $0 < q < 1$, montrer que :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q}$$

Retrouver alors les résultats précédents.

Exercice 3. Suites géométriques et somme

1. Soit (u_n) la suite définie, pour $n \geq 0$, par $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$ et (S_n) la suite définie par $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
Montrer que (u_n) est géométrique puis déterminer la limite de la suite (S_n).

2. Soit (v_n) la suite définie, pour $n \geq 0$, par $v_n = \dfrac{3}{2^n}$ et (S'_n) la suite définie par $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.
Déterminer la limite de la suite (S'_n).

Réponses

(1.) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 6$, ***(2.)*** $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = 6$.

Exercice 4. Expression générale d'une suite arithmético-géométrique

1. Les suites (u_n) et (w_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_1 & = 10 \\ u_{n+1} & = 2 \times u_n - 1 \end{cases} \quad \Big| \quad (w_n) : \begin{cases} w_1 & \\ w_n & = u_n - 1 \end{cases}$$

1. a. Montrer que la suite (w_n) est géométrique puis que :

$$\forall n \geq 1 \; ; \; u_n = 9 \times (2)^{n-1} + 1$$

1. b. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$u_n = 4{,}5 \times 2^n + 1$$

Remarque

Il est souvent demandé d'exprimer le terme général de la suite sous la forme $u_n = a \times q^n + b$.
On utilise pour cela les propriétés de la fonction puissance. Pour n et p entiers (et q non nul) on a

$$q^{n-p} = q^n \times q^{-p} = q^n \times \frac{1}{q^p} = \frac{q^n}{q^p}$$

2. Les suites (a_n) et (b_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(a_n) : \begin{cases} a_0 & = -5 \\ a_{n+1} & = 0.8 \times a_n + 2 \end{cases} \quad \Big| \quad (b_n) : \begin{cases} b_0 & \\ b_n & = -a_n + 10 \end{cases}$$

Montrer que la suite (b_n) est géométrique puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; a_n = -15 \times (0{,}8)^n + 10$$

3. Les suites (c_n) et (d_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(c_n) : \begin{cases} c_2 & = 10000 \\ c_{n+1} & = 0.5 \times c_n - 300 \end{cases} \quad \Big| \quad (d_n) : \begin{cases} d_2 & \\ d_n & = c_n + 600 \end{cases}$$

Montrer que la suite (d_n) est géométrique puis que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$c_n = 42\,400 \times 0{,}5^n - 600$$

Exercice 5. Limites, variations et algorithmes

1. Déterminer les limites des suites (u_n), (a_n) et (c_n) de l'exercice 4.

2. Déterminer les sens de variation des suites (v_n), (a_n) et (c_n) de l'exercice 4.
Aide : étudier le signe de la différence de deux termes consécutifs $(u_{n+1} - u_n)$, $(a_{n+1} - a_n)$ *et* $(c_{n+1} - c_n)$

3. A l'aide de la calculatrice, résoudre alors dans l'ensemble des entiers naturels les inéquations :

3. a. $(E_1)\ :\ u_n > 1\,000$;

3. b. $(E_2)\ :\ a_n > 9{,}9$;

3. c. $(E_3)\ :\ c_n < -599$.

4. On cherche maintenant à résoudre les inéquations de la question 3 avec un algorithme. Recopier et compléter cet algorithme pour chacune des questions de la question 3 puis programmer-le afin de retrouver les résultats précédents.

Pseudo Code

```
u ← ···
n ← 0
Tant que ···   Faire
    u ← ···
    n ← ···
Fin Tant que
afficher ···
```

Ce TD propose maintenant des **exercices du baccalauréat ES/L** dans leur **intégralité**. Les questions en italique sont celles qui ont été modifiées car elles faisaient intervenir des compétences que nous n'avons pas encore acquises (chapitre sur le logarithme).

Exercice 6. D'après Bac ES/L 2016 de Pondichéry - 21 Avril 2016 (5 points)

Remarque : Cet exercice est l'exercice 4 du sujet des candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

En janvier 2016, une personne se décide à acheter un scooter coûtant 5 700 euros sans apport personnel. Le vendeur lui propose un crédit à la consommation d'un montant de 5 700 euros, au taux mensuel de 1,5 %. Par ailleurs, la mensualité fixée à 300 euros est versée par l'emprunteur à l'organisme de crédit le 25 de chaque mois. Ainsi, le capital restant dû augmente de 1,5 % puis baisse de 300 euros. Le premier versement a lieu le 25 février 2016. On note u_n le capital restant dû en euros juste après la n-ième mensualité (n entier naturel non nul). On convient que $u_0 = 5700$. Les résultats seront donnés sous forme approchée à 0,01 près si nécessaire.

1.

1. a. Démontrer que u_1, capital restant dû au 26 février 2016 juste après la première mensualité, est de 5 485,50 euros.

1. b. Calculer u_2.

2. On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = 1,015u_n - 300$.

On considère l'algorithme suivant :

Pseudo Code

```
u ← 7 500
n ← 0
Tant que u > 4500   Faire
    u ← 1,015 × u − 300
    n ← n + 1

Fin Tant que
afficher n
```

2. a. Recopier et compléter le tableau en ajoutant autant de colonnes que nécessaires entre la deuxième et la dernière colonne.

Valeur de u	5 700		
Valeur de n	0		
$u > 4500$ (vrai/faux)	vrai	vrai	faux

2. b. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20000$.

3. a. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = 1,015 \times v_n$.

3. b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = 20000 - 14300 \times 1,015^n$$

4. À l'aide de la réponse précédente, répondre aux questions suivantes :

4. a. Démontrer qu'une valeur approchée du capital restant dû par l'emprunteur au 26 avril 2017 est 2 121,68 euros.

4. b. *Déterminer à l'aide de la calculatrice le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser intégralement le prêt.*

4. c. Quel sera le montant de la dernière mensualité ?

4. d. Lorsque la personne aura terminé de rembourser son crédit à la consommation, quel sera le coût total de son achat ?

Exercice 7. D'après Bac ES/L 2016 du Liban - 31 Mai 2016 (5 points)

Remarque : Cet exercice est l'exercice 3 du sujet des candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées.
Le patron de cette entreprise remarque que, chaque année, 12 % de contrats supplémentaires sont souscrits et 6 contrats résiliés. Il se fonde sur ce constat pour estimer le nombre de contrats annuels à venir.
En 2015, l'entreprise PiscinePlus dénombrait 75 contrats souscrits.
On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de contrats souscrits auprès de l'entreprise PiscinePlus l'année $2015+n$. Ainsi, on a $u_0 = 75$.

1.

1. a. Estimer le nombre de contrats d'entretien en 2016.

1. b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 1,12u_n - 6$.

2. L'entreprise PiscinePlus peut prendre en charge un maximum de 100 contrats avec son nombre actuel de salariés. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel.

On cherche à connaître en quelle année l'entreprise devra embaucher. Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

Pseudo Code

```
U ← 75
n ← 0
Tant que ··· Faire
    U ← ···
    n ← n + 1
Fin Tant que
afficher ···
```

2. a. Recopier et compléter la ligne L9.

2. b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus. On arrondira les résultats à l'unité.

Valeur de n	0		
Valeur de U	75		

2. c. Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme puis interpréter cette valeur dans le contexte de cet exercice.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1,12u_n - 6$ et $u_0 = 75$.

On pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 50$.

3. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

3. b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25 \times 1,12^n + 50$.

3. c. *Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n > 100$ à l'aide de la calculatrice.*

3. d. Quel résultat de la question 2 retrouve-t-on ?

Correction de l'exercice 4

1.

Les suites (u_n) et (w_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_1 & = 10 \\ u_{n+1} & = 2 \times u_n - 1 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (w_n) : \begin{cases} w_1 & \\ w_n & = u_n - 1 \end{cases}$$

1. a. **Montrons que la suite (w_n) est géométrique**.

Pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ w_{n+1} &= (2\ u_n - 1) - 1 \\ w_{n+1} &= 2 \times u_n - 2 \\ w_{n+1} &= 2 \times \left(u_n + \frac{-2}{2}\right) \\ w_{n+1} &= 2 \times (u_n - 1) \\ w_{n+1} &= 2 \times w_n \end{aligned}$$

La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 2$, et de premier terme $w_1 = 9$ puisque :

$$\begin{aligned} w_1 &= u_1 - 1 \\ w_1 &= 10 - 1 \\ w_1 &= 9 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(w_n) : \begin{cases} w_1 & = 9 \\ w_{n+1} & = 2 \times w_n \end{cases} \ ; \ \forall n \geq 1}$$

1. b. **Exprimons w_n en fonction de n**.

La suite (w_n) est géométrique de raison $q = 2$, et de premier terme $w_1 = 9$ donc son terme général est

$$\forall n \geq 1\ ;\ w_n = w_1 \times (q)^{n-1}$$

Soit

$$\boxed{\forall n \geq 1\ ;\ w_n = 9 \times (2)^{n-1}}$$

1. c. **Exprimons u_n en fonction de n**.

De l'égalité définie pour tout entier $n \geq 1$:

$$w_n = u_n - 1$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = w_n + 1$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \geq 1\ ;\ u_n = 9 \times (2)^{n-1} + 1}$$

1. d. On en déduit alors que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} u_n &= 9 \times 2^n \times 2^{-1} + 1 \\ &= \underbrace{9 \times 2^{-1}}_{4,5} \times 2^n + 1 \\ u_n &= \underline{4,5 \times 2^n + 1} \end{aligned}$$

2.

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(a_n) : \begin{cases} a_0 & = -5 \\ a_{n+1} & = 0{,}8 \times a_n + 2 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (b_n) : \begin{cases} b_0 & \\ b_n & = -a_n + 10 \end{cases}$$

2. a. Montrons que la suite (b_n) est géométrique.

Pour tout entier n on a :

$$b_{n+1} = -a_{n+1} + 10$$
$$b_{n+1} = -(0{,}8\ a_n + 2) + 10$$
$$b_{n+1} = -0{,}8 \times a_n + 8$$
$$b_{n+1} = 0{,}8 \times \left(-a_n + \frac{8}{0{,}8}\right)$$
$$b_{n+1} = 0{,}8 \times (-a_n + 10)$$
$$b_{n+1} = 0{,}8 \times b_n$$

La suite (b_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$, et de premier terme $b_0 = 15$ puisque :

$$b_0 = -a_0 + 10$$
$$b_0 = 5 + 10$$
$$b_0 = 15$$

Soit :

$$\boxed{(b_n) : \begin{cases} b_0 & = 15 \\ b_{n+1} & = 0{,}8 \times b_n \end{cases} \ ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. b. Exprimons b_n en fonction de n.

La suite (b_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$, et de premier terme $b_0 = 15$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ b_n = b_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ b_n = 15 \times (0{,}8)^n}$$

2. c. Exprimons a_n en fonction de n.

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$b_n = -a_n + 10$$

On peut en déduire l'expression :

$$a_n = -b_n + 10$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ a_n = -15 \times (0{,}8)^n + 10}$$

3.

Les suites (c_n) et (d_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(c_n) : \begin{cases} c_2 & = 10000 \\ c_{n+1} & = 0.5 \times c_n - 300 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (d_n) : \begin{cases} d_2 & \\ d_n & = c_n + 600 \end{cases}$$

3. a. Montrons que la suite (d_n) est géométrique.

Pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= c_{n+1} + 600 \\ d_{n+1} &= (0{,}5\, c_n - 300) + 600 \\ d_{n+1} &= 0{,}5 \times c_n + 300 \\ d_{n+1} &= 0{,}5 \times \left(c_n + \frac{300}{0{,}5}\right) \\ d_{n+1} &= 0{,}5 \times (c_n + 600) \\ d_{n+1} &= 0{,}5 \times d_n \end{aligned}$$

La suite (d_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$, et de premier terme $d_2 = 10\,600$ puisque :

$$\begin{aligned} d_2 &= c_2 + 600 \\ d_2 &= 10\,000 + 600 \\ d_2 &= 10\,600 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(d_n) : \begin{cases} d_2 & = 10\,600 \\ d_{n+1} & = 0{,}5 \times d_n \end{cases} \; ; \forall n \geq 2}$$

3. b. Exprimons d_n en fonction de n.

La suite (d_n) est géométrique de raison $q = 0{,}5$, et de premier terme $d_2 = 10\,600$ donc son terme général est

$$\forall n \geq 2 \; ; \; d_n = d_2 \times (q)^{n-2}$$

Soit

$$\boxed{\forall n \geq 2 \; ; \; d_n = 10\,600 \times (0{,}5)^{n-2}}$$

3. c. Exprimons c_n en fonction de n.

De l'égalité définie pour tout entier $n \geq 2$:

$$d_n = c_n + 600$$

On peut en déduire l'expression :

$$c_n = d_n - 600$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \geq 2 \; ; \; c_n = 10\,600 \times (0{,}5)^{n-2} - 600}$$

3. d. On en déduit alors que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$\begin{aligned} c_n &= 10\,600 \times 0{,}5^n \times 0{,}5^{-2} - 600 \\ &= \underbrace{10\,600 \times 0{,}5^{-2}}_{42\,400} \times 0{,}5^n - 600 \\ c_n &= \underline{42\,400 \times 0{,}5^n - 600} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 : Bac ES/L 2016 de Pondichéry - 21 Avril 2016

1.

1. a. Démontrer que u_1, capital restant dû au 26 février 2016 juste après la première mensualité, est de 5 485,50 euros.
Au 26 février 2016, le capital restant dû u_1 s'obtient en faisant une augmentation de 1,5 % des 5 485,50 euros de janvier 2016 et en déduisant les 300 euros de mensualité. Effectuer une augmentation de 1,5 % revient à multiplier par $1+1,5\,\% = 1,015$ donc u_1, capital restant dû au 26 février 2016 juste après la première mensualité, est de :

$$u_1 = 5\,700 \times 1,015 - 300 = \underline{5\,485,5€}$$

1. b. Calculer u_2.
On obtient de même le capital restant dû au 26 mars 2016 u_2 en faisant une augmentation de 1,5 % des 5 485,5 euros de février 2016 et en déduisant les 300 euros de mensualité soit :

$$u_2 = 5\,485,5 \times 1,015 - 300 \approx \underline{5\,267,78€}$$

2. On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = 1,015u_n - 300$. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un nombre réel
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 700
	Affecter à n la valeur 0
	Tant que $u > 4\,500$ faire
	u prend la valeur $1,015 \times u - 300$
	n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

2. a. Recopier et compléter le tableau en ajoutant autant de colonnes que nécessaires entre la deuxième et la dernière colonne.

u	5 700.00	5 485.50	5 267.78	5 046.80	4 822.50	4 594.84	4 363.76
n	0	1	2	3	4	5	6
$u > 4500$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

2. b. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte .
L'algorithme affichera donc 6. Il s'agit du nombre de mois nécessaire pour que le capital restant dû soit inférieur pour la première fois à 4 500 euros.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20000$.

3. a. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = 1{,}015 \times v_n$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 &= 5700 \\ u_{n+1} &= 1{,}015 \times u_n - 300 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n &= u_n - 20000 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 20000 \\ v_{n+1} &= (1{,}015\ u_n - 300)\ - 20000 \\ v_{n+1} &= 1{,}015 \times u_n - 20300 \\ v_{n+1} &= 1{,}015 \times \left(u_n + \frac{-20300}{1{,}015} \right) \\ v_{n+1} &= 1{,}015 \times (u_n - 20000) \\ v_{n+1} &= 1{,}015 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une <u>suite géométrique</u> de raison $q = 1{,}015$, et de premier terme $v_0 = -14300$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 20000 \\ v_0 &= 5700 - 20000 \\ v_0 &= -14300 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 &= -14300 \\ v_{n+1} &= 1{,}015 \times v_n \end{cases} \ ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 20000 - 14300 \times 1{,}015^n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}015$, et de premier terme $v_0 = -14300$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ v_n = -14300 \times (1{,}015)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 20000$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 20000$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = -14300 \times (1{,}015)^n + 20000}$$

4. À l'aide de la réponse précédente, répondre aux questions suivantes :
On a montré lors de la question **(3.b.)** que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = 20000 - 14300 \times 1{,}015^n$$

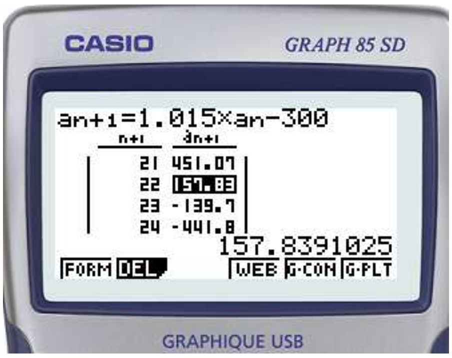
4. a. Démontrer qu'une valeur approchée du capital restant dû par l'emprunteur au 26 avril 2017 est 2 121,68 euros.
Le 26 avril 2017 on a $n = 15$ donc :

$$u_{15} = 20000 - 14300 \times 1{,}015^{15} \approx \underline{2\,121.68€}$$

4. b. Déterminer le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser intégralement le prêt.
On veut déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 0$, il nous faut donc résoudre cette inéquation. Pour tout entier naturels n :

$$u_n \leq 0 \Longleftrightarrow 20000 - 14300 \times 1{,}015^n \leq 0$$

On utilise alors la calculatrice qui nous donne :



Il faut donc 23 mensualité pour rembourser le crédit.

Remarque : l'affichage de la calculatrice présente une troncature au centième et pas un arrondi. Il faut poser le curseur sur le nombre cherché pour avoir plus de chiffres significatifs.

4. c. Quel sera le montant de la dernière mensualité ?
On a $u_{22} \approx 157{,}84$ donc la dernière mensualité sera de :

$$157{,}84 \times 1{,}015 = \underline{160{,}20€}$$

4. d. Lorsque la personne aura terminé de rembourser son crédit à la consommation, quel sera le coût total de son achat ?
L'emprunteur aura donc payé au total 22 mensualités de 200 euros plus 160,20 euros soit :

$$22 \times 300 + 160{,}20 = \underline{6\,760{,}2€}$$

Correction de l'exercice 7 : Bac ES/L 2016 du Liban - 31 Mai 2016

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées. Le patron de cette entreprise remarque que, chaque année, 12 % de contrats supplémentaires sont souscrits et 6 contrats résiliés. Il se fonde sur ce constat pour estimer le nombre de contrats annuels à venir. En 2015, l'entreprise PiscinePlus dénombrait 75 contrats souscrits. On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de contrats souscrits auprès de l'entreprise PiscinePlus l'année $2015+n$. Ainsi, on a $u_0 = 75$.

1.

1. a. Estimer le nombre de contrats d'entretien en 2016.
En 2016, l'entreprise aura gagné 12 % des 75 contrats de 2015 et en aura perdu 6 donc ce qui nous donne un nombre de contrats en 2016 de :

$$75 \times (1+12\%) - 6 = 1,12 \times 75 - 6 = \underline{78}$$

1. b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 1,12u_n - 6$.
Pour tout entier n, en $2015+(n+1)$, l'entreprise aura gagné 12 % des u_n contrats de $2015+n$ et en aura perdu 6 donc ce qui nous donne un nombre de contrats en $2015+(n+1)$ de :

$$u_{n+1} = u_n \times (1+12\%) - 6 = \underline{1,12 \times u_n - 6}$$

2. L'entreprise PiscinePlus peut prendre en charge un maximum de 100 contrats avec son nombre actuel de salariés. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel. On cherche à connaître en quelle année l'entreprise devra embaucher. Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		U est un nombre réel
L3		Traitement : Affecter à n la valeur 0
L4		Affecter à U la valeur 75
L5		Tant que $U \leqslant 100$ faire
L6		n prend la valeur $n+1$
L7		U prend la valeur $1,12U-6$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher ...

2. a. Recopier et compléter la ligne L9.
On cherche à connaître en quelle année l'entreprise devra embaucher donc à partir de quand le nombre de contrats dépassera 100. Il faut alors en sortie :

$\boxed{\text{Afficher } 2015+n}$ ou $\boxed{\text{Afficher } n}$ même si la première solution correspond plus à la question posée.

2. b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus. On arrondira les résultats à l'unité.
On peut ajouter une ligne pour avoir l'année.

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
n	0	1	2	3	4	5	6	7
U arrondi à l'unité	75	78	81	85	89	94	99	105

2. c. Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme puis interpréter cette valeur.
L'algorithme affichera donc $2015+7=2022$ ce qui correspond à l'année à partir de laquelle le nombre de contrats sera supérieur à 100 ce qui imposera l'embauche de personnel.

3. On pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 50$.

3. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 75 \\ u_{n+1} & = 1{,}12 \times u_n - 6 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - 50 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 50$$
$$v_{n+1} = (1{,}12\ u_n - 6) - 50$$
$$v_{n+1} = 1{,}12 \times u_n - 56$$
$$v_{n+1} = 1{,}12 \times \left(u_n + \frac{-56}{1{,}12}\right)$$
$$v_{n+1} = 1{,}12 \times (u_n - 50)$$
$$v_{n+1} = 1{,}12 \times v_n$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1{,}12$, et de premier terme $v_0 = 25$ puisque :

$$v_0 = u_0 - 50$$
$$v_0 = 75 - 50$$
$$v_0 = 25$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = 25 \\ v_{n+1} & = 1{,}12 \times v_n \end{cases} \quad ; \ \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25 \times 1{,}12^n + 50$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}12$, et de premier terme $v_0 = 25$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \, ; \ v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \, ; \ v_n = 25 \times (1{,}12)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 50$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 50$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \, ; \ u_n = 25 \times (1{,}12)^n + 50}$$

3. c. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n > 100$ à l'aide de la calculatrice.

Pour tout entier naturels n :

$$u_n > 100 \iff 25 \times 1{,}12^n + 50 > 100$$

On utilise alors la calculatrice qui nous donne :

Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels supérieurs ou égaux à 7

3. d. Quel résultat de la question 2 retrouve-t-on?

On retrouve alors le premier rang de l'année 2015 + n pour lequel le nombre de contrats est supérieur strictement à 100 soit $n = 7$ comme nous l'avons vu dans la question **(2.c.)**.