



Math93.com

TD n°3B - Terminale ES/L

Révisions du Bac

Les Probabilités

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD. Les autres présentent des éléments de réponses et un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Point Bac

Les sujets du Bac ES/L comportent tous un exercice sur les probabilités composé de deux ou trois parties.

1. La première traite des probabilités conditionnelles (tous les exercices sauf ex. 6).
2. La deuxième partie traite souvent de la loi normale (ex. 1, 2, 4, 5, 6) et parfois de la loi uniforme (ex. 5) ou binomiale (ex. 6).
3. L'éventuelle troisième partie traite d'un problème de prise de décision à l'aide d'un intervalle de fluctuation asymptotique (ex. 2, 4) ou, plus rarement, d'une question liée à un intervalle de confiance (ex. 3, 6).

Exercice 1. Métropole 2016 (Loi normale)

5 points

Un téléphone portable contient en mémoire 3 200 chansons archivées par catégories : rock, techno, rap, reggae ... dont certaines sont interprétées en français. Parmi toutes les chansons enregistrées, 960 sont classées dans la catégorie rock. Une des fonctionnalités du téléphone permet d'écouter de la musique en mode « lecture aléatoire » : les chansons écoutées sont choisies au hasard et de façon équiprobable parmi l'ensemble du répertoire. Au cours de son footing hebdomadaire, le propriétaire du téléphone écoute une chanson grâce à ce mode de lecture. On note :

- R l'évènement : « la chanson écoutée est une chanson de la catégorie rock » ;
- F l'évènement : « la chanson écoutée est interprétée en français ».

Partie A

1. Calculer $p(R)$, la probabilité de l'évènement R .
2. 35 % des chansons de la catégorie rock sont interprétées en français ; traduire cette donnée en utilisant les évènements R et F .
3. Calculer la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson rock et qu'elle soit interprétée en français.
4. Parmi toutes les chansons enregistrées 38,5 % sont interprétées en français. Montrer que $p(F \cap \bar{R}) = 0,28$.
5. En déduire $p_{\bar{R}}(F)$ et exprimer par une phrase ce que signifie ce résultat.

Partie B

Le propriétaire du téléphone écoute régulièrement de la musique à l'aide de son téléphone portable. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque écoute de musique, associe la durée (en minutes) correspondante ; on admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 10$. Le propriétaire écoute de la musique. Les résultats de cette partie seront arrondis au millième.

1. Quelle est la probabilité que la durée de cette écoute soit comprise entre 15 et 45 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que cette écoute dure plus d'une heure ?

Réponses

(A1) 0,3 - (A2) 0,35 - (A3) 0,105 - (A4) 0,28 - (A5) 0,4 - (B1) 0,866 - (B2) 0,001

La correction détaillée sur www.math93.com

Exercice 2. Nouvelle Calédonie 2017 (loi normale et IFA)

6 points

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante. Dans tout l'exercice, si nécessaire, les résultats seront arrondis au millième.

À l'occasion de la fête des Mères, un fleuriste propose à ses clients plusieurs types de bouquets spéciaux.

Partie A

Chaque bouquet spécial fête des Mères est composé uniquement d'œillets, uniquement de tulipes ou uniquement de marguerites. Chaque bouquet est composé de fleurs d'une même couleur, soit blanches, soit jaunes. Ce fleuriste a choisi de préparer 60 % de ces bouquets spéciaux avec uniquement des tulipes, 28 % avec uniquement des œillets, les autres bouquets ne comportant que des marguerites. On sait d'autre part que :

- la moitié des bouquets confectionnés avec des tulipes sont de couleur jaune ;
- la proportion de bouquets de coloris jaune parmi les bouquets d'œillets est de un cinquième ;
- parmi les bouquets de marguerites, on compte un quart de jaunes.

Un client entre dans le magasin et achète au hasard un bouquet parmi les bouquets « fête des Mères ». On note :

- T l'évènement : « le bouquet acheté est un bouquet de tulipes » et O : « le bouquet acheté est un bouquet d'œillets » ;
- M l'évènement : « le bouquet acheté est un bouquet de marguerites » et J : « les fleurs du bouquet acheté sont jaunes » ;
- B l'évènement : « les fleurs du bouquet acheté sont blanches ».

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
2. Calculer la probabilité que le client ait acheté un bouquet de tulipes blanches.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement B notée $p(B)$ est égale à 0,614.
4. Sachant que les fleurs du bouquet acheté par ce client sont blanches, déterminer la probabilité que ce soit un bouquet d'œillets.

Partie B

L'un des fournisseurs est spécialisé dans la production d'une espèce de rosiers nommée « Arlequin ». On note X la variable aléatoire qui, à chaque rosier de cette espèce pris au hasard, cultivé chez ce jardinier, associe sa hauteur exprimée en centimètres. On admet, d'après les observations et mesures réalisées, que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 3$.

1. On choisit au hasard un rosier « Arlequin » chez ce fournisseur.
 1. a. Déterminer la probabilité que ce rosier mesure entre 47 et 53 centimètres.
 1. b. Déterminer la probabilité que ce rosier mesure plus de 56 centimètres.
2. Le fournisseur veut prévoir quelle sera la hauteur atteinte ou dépassée par 80 % de ses rosiers « Arlequin ». Déterminer la hauteur cherchée (on l'arrondira au mm).

Partie C

En se basant sur les ventes réalisées l'année précédente, ce fleuriste suppose que 85 % de ses clients viendront ce jour-là acheter un des bouquets pour la fête des Mères.

Quelques semaines avant de préparer ses commandes, il décide de vérifier son hypothèse en envoyant un questionnaire à 75 de ses clients, ces derniers étant supposés représentatifs de l'ensemble de sa clientèle.

Les réponses reçues montrent que, parmi les 75 clients interrogés, 16 déclarent qu'ils ne lui achèteront pas de bouquet pour la fête des Mères. Le fleuriste doit-il rejeter son hypothèse ?

Réponses

(A.2) 0,3 - (A.3) 0,614 - (A.4) $\approx 0,365$ (B.1a) 0,683 - (B.1b) 0,023 -

(B.2) $k \approx 47,5$ - (C) $I_{75} \approx [0,769 ; 0,931]$

Le corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 3. Métropole septembre 2016 (Intervalle de confiance)

5 points

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir au millième.

À partir d'une étude statistique dans une chaîne de restaurants, on a modélisé le comportement des clients par :

- 60 % des clients sont des hommes ;
- 80 % des hommes mangent un dessert alors que seulement 45 % des femmes en mangent un.

On interroge au hasard un client de cette chaîne. On note :

- H l'évènement « le client interrogé est un homme » ;
- D l'évènement « le client interrogé a mangé un dessert ».

On note également :

- \bar{A} l'évènement contraire d'un évènement A ;
- $p(A)$ la probabilité d'un évènement A .

Partie A

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le client interrogé soit un homme et ait mangé un dessert.
3. Montrer que $p(D) = 0,66$.
4. Le client interrogé affirme avoir pris un dessert. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

Partie B

Le directeur de cette chaîne souhaite savoir si ses clients actuels sont satisfaits des menus proposés dans ses restaurants.

Une enquête de satisfaction est réalisée sur un échantillon de 300 clients et 204 se déclarent satisfaits des menus proposés.

1. Donner un intervalle de confiance au niveau de 95 % de la proportion de clients satisfaits.
2. Le directeur souhaite cependant avoir une estimation plus précise et donc veut un intervalle de confiance au niveau de 95 % d'amplitude 0,06.

Déterminer le nombre de personnes à interroger pour obtenir un tel intervalle.

Réponses

(A2) 0,48 - (A4) 0,273 - (B1) $\approx [0,622 ; 0,738]$ - (B2) $n = 1112$

Le corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 4. Centres étrangers 2016 (Loi normale et IFA)

Un fabricant produit des pneus de deux catégories, la catégorie « pneu neige » et la catégorie « pneu classique ». Sur chacun d'eux, on effectue des tests de qualité pour améliorer la sécurité.

On dispose des informations suivantes sur le stock de production :

- le stock contient 40 % de pneus neige ;
- parmi les pneus neige, 92 % ont réussi les tests de qualité ;
- parmi les pneus classiques, 96 % ont réussi les tests de qualité.

Un client choisit un pneu au hasard dans le stock de production. On note :

- N l'évènement : « Le pneu choisi est un pneu neige » ;
- C l'évènement : « Le pneu choisi est un pneu classique » ;
- Q l'évènement : « Le pneu choisi a réussi les tests de qualité ».

Rappel des notations :

Si A et B sont deux évènements, $p(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé. On notera aussi \overline{A} l'évènement contraire de A . Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.

Dans tout cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

Partie A

1. Illustrer la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $N \cap Q$ et interpréter ce résultat par une phrase.
3. Montrer que $p(Q) = 0,944$.
4. Sachant que le pneu choisi a réussi les tests de qualité, quelle est la probabilité que ce pneu soit un pneu neige ?

Partie B

On appelle durée de vie d'un pneu la distance parcourue avant d'atteindre le témoin d'usure.

On note X la variable aléatoire qui associe à chaque pneu classique sa durée de vie, exprimée en milliers de kilomètres. On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 8$.

1. Quelle est la probabilité qu'un pneu classique ait une durée de vie inférieure à 25 milliers de kilomètres ?
2. Déterminer la valeur du nombre d pour que, en probabilité, 20 % des pneus classiques aient une durée de vie supérieure à d kilomètres.

Partie C

Une enquête de satisfaction effectuée l'an dernier a révélé que 85 % des clients étaient satisfaits de la tenue de route des pneus du fabricant. Ce dernier souhaite vérifier si le niveau de satisfaction a été le même cette année. Pour cela, il décide d'interroger un échantillon de 900 clients afin de conclure sur l'hypothèse d'un niveau de satisfaction maintenu.

Parmi les 900 clients interrogés, 735 sont satisfaits de la tenue de route.

Quelle va être la conclusion du directeur avec un niveau de confiance 0,95 ? Détailler les calculs, la démarche et l'argumentation.

Réponses

(A2) 0,308 - (A4) 0,390 - (B1) 0,266 (B2) $d \approx 36733$ - (C) $f \approx 0,817 \notin [0,826 ; 0,874]$

Le corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 5. Nouvelle calédonie, mars 2016 (Loi normale et loi uniforme)

5 points

Les 275 passagers d'un vol long-courrier s'apprêtent à embarquer dans un avion possédant 55 sièges en classe confort et 220 sièges en classe économique. Les voyageurs partent soit pour un séjour court, soit pour un séjour long. Parmi les passagers voyageant en classe économique, 35 % partent pour un séjour long alors que parmi les passagers ayant choisi la classe confort, 70 % ont opté pour un séjour long.

Partie A

On choisit au hasard un passager du vol. On note les évènements suivants :

- E : « Le passager voyage en classe économique. » et L : « Le passager part pour un séjour long. »

On note \bar{E} et \bar{L} les évènements contraires des évènements E et L .

1. Déterminer la probabilité de l'évènement E , notée $p(E)$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Déterminer la probabilité que le passager choisi parte en classe économique pour un séjour long.
4. Montrer que $p(L) = 0,42$.
5. On choisit au hasard un passager partant pour un long séjour. Quelle est la probabilité que ce passager voyage en classe économique ?

Partie B

Lors de l'embarquement, chaque passager enregistre un bagage qui sera placé dans la soute de l'avion pendant le vol. Le poids de ce bagage ne doit pas excéder 20 kg. Dans le cas où le poids de son bagage dépasserait 20 kg, le passager doit s'acquitter d'une « taxe d'excédent de bagage ». Le montant à payer en cas d'excédent est précisé dans le tableau ci-dessous.

| Poids p (en kg) du bagage | Taxe d'excédent de bagage |
|-----------------------------|-------------------------------------|
| $20 < p \leq 21$ | 12 € |
| $21 < p \leq 22$ | 24 € |
| $22 < p \leq 24$ | 50 € |
| $p > 24$ | 20 €/kg au-delà des 20 kg autorisés |

On choisit au hasard un bagage devant être transporté dans la soute de l'avion. On admet que le poids de ce bagage, exprimé en kg, est modélisé par une variable aléatoire M qui suit la loi normale d'espérance 18,4 et d'écart type 1,2. *Dans cette partie, les résultats seront arrondis au millième.*

1. Calculer la probabilité que le passager propriétaire du bagage choisi s'acquitte d'une taxe d'excédent de bagage.
2. Calculer la probabilité que le passager propriétaire du bagage choisi s'acquitte d'une taxe d'excédent de bagage de 24 €.

Partie C

L'enregistrement des bagages des passagers est possible pendant une durée de 2 h.

Un passager du vol est choisi au hasard et on note T la durée (en minutes) qui s'est écoulée entre le début des enregistrements des bagages et l'arrivée de ce passager au comptoir d'enregistrement.

On admet que T est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 120]$.

Déterminer la probabilité que le passager choisi enregistre ses bagages dans les 30 dernières minutes autorisées.

Réponses

(A1) 0,8 - (A3) 0,28 - (A5) 2/3 - (B1) 0,091 - (B2) 0,014 - (C) 0,25

Le corrigé détaillé sur www.math93.com

Exercice 6. Asie Juin 2016 (loi binomiale, loi normale, Intervalle confiance)

6 points

Dans ce qui suit, les résultats approchés sont à arrondir au millième.

Une entreprise produit en grande série des clés USB pour l'industrie informatique.

PARTIE A

On prélève au hasard 100 clés dans la production de la journée pour vérification. La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 clés.

On admet que la probabilité qu'une clé USB prélevée au hasard dans la production d'une journée soit défectueuse est égale à 0,015.

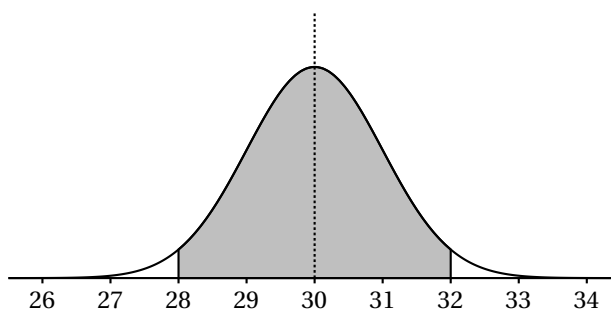
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de clés défectueuses de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer les probabilités $p(X = 0)$ et $p(X = 1)$.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux clés soient défectueuses.

PARTIE B

Une clé est dite conforme pour la lecture lorsque sa vitesse de lecture, exprimée en Mo/s, appartient à l'intervalle $[98; 103]$. Une clé est dite conforme pour l'écriture lorsque sa vitesse d'écriture exprimée en Mo/s appartient à l'intervalle $[28; 33]$.

1. On note R la variable aléatoire qui, à chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse de lecture. On suppose que la variable aléatoire R suit la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$.
Calcule la probabilité qu'une clé soit conforme pour la lecture.
2. On note W la variable aléatoire qui, chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse d'écriture. On suppose que la variable aléatoire W suit une loi normale.
Le graphique ci-après représente la densité de probabilité de la variable aléatoire W .



L'unité d'aire est choisie de façon à ce que l'aire sous la courbe soit égale à un et l'aire grisée est environ égale à 0,95 unité d'aire. La droite d'équation $x = 30$ est un axe de symétrie de la courbe.

Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire W . Justifier.

PARTIE C

Dans cette partie, on considère une grande quantité de clés devant être livrées à un éditeur de logiciels. On considère un échantillon de 100 clés prélevées au hasard dans cette livraison. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise. On constate que 94 clés sont sans défaut. Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion des clés USB qui sont sans défaut.

Réponses

(A2) $p(X = 0) \approx 0,221$ et $p(X = 1) \approx 0,336$ - (A3) - (B1) - (B2) - (C)