Math93.com

TD n°1 - Terminale ES/L
Révisions du Bac
Les Suites

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD. Les autres présentent des éléments de réponses et un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Partie 1 : Les grands classiques

Exercice 1. Pondichery Avril 2016 (Exercice 4 - Obligatoire) 5 points

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

En janvier 2016, une personne se décide à acheter un scooter coûtant 5 700 euros sans apport personnel. Le vendeur lui propose un crédit à la consommation d'un montant de 5 700 euros, au taux mensuel de 1,5 %. Par ailleurs, la mensualité fixée à 300 euros est versée par l'emprunteur à l'organisme de crédit le 25 de chaque mois. Ainsi, le capital restant dû augmente de 1,5 % puis baisse de 300 euros.
Le premier versement a lieu le 25 février 2016.
On note u_n le capital restant dû en euros juste après la n-ième mensualité (n entier naturel non nul). On convient que $u_0 = 5\,700$.
Les résultats seront donnés sous forme approchée à $0,01$ près si nécessaire.

1.

1. a. Démontrer que u_1, capital restant dû au 26 février 2016 juste après la première mensualité, est de 5 485,50 euros.

1. b. Calculer u_2.

2. On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 1,015u_n - 300$$

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un nombre réel
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 700
	Affecter à n la valeur 0
	Tant que $u > 4\,500$ faire
	u prend la valeur $1,015 \times u - 300$
	n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

2. a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaires entre la deuxième et la dernière colonne.

Valeur de u	5 700				
Valeur de n	0				
$u > 4500$ (vrai/faux)	vrai			vrai	faux

2. b. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20000$.

3. a. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = 1,015 \times v_n$.

3. b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
$u_n = 20000 - 14300 \times 1,015^n$.

4. À l'aide de la réponse précédente, répondre aux questions suivantes :

4. a. Démontrer qu'une valeur approchée du capital restant dû par l'emprunteur au 26 avril 2017 est 2 121,68 euros.

4. b. Déterminer le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser intégralement le prêt.

4. c. Quel sera le montant de la dernière mensualité ?

4. d. Lorsque la personne aura terminé de rembourser son crédit à la consommation, quel sera le coût total de son achat ?

> **Réponses**
> *Le corrigé sur www.math93.com*

Exercice 2. EPI - Antilles juin 2016 (Ex. 4 du sujet) — 3 points

Commun à tous les candidats.

Afin de lutter contre la pollution de l'air, un département a contraint dès l'année 2013 certaines entreprises à diminuer chaque année la quantité de produits polluants qu'elles rejettent dans l'air.
Ces entreprises ont rejeté 410 tonnes de ces polluants en 2013 et 332 tonnes en 2015. On considère que le taux de diminution annuel de la masse de polluants rejetés est constant.

1. Justifier que l'on peut considérer que l'évolution d'une année sur l'autre correspond à une diminution de 10 %.

2. En admettant que ce taux de 10 % reste constant pour les années à venir, déterminer à partir de quelle année la quantité de polluants rejetés par ces entreprises ne dépassera plus le seuil de 180 tonnes fixé par le conseil départemental.

> **Réponses**
> *(2.) à partir de 2021. Le corrigé sur www.math93.com*

Exercice 3. Liban Mai 2016 (Ex. 3 - Obligatoire) 5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées.
Le patron de cette entreprise remarque que, chaque année, 12 % de contrats supplémentaires sont souscrits et 6 contrats résiliés. Il se fonde sur ce constat pour estimer le nombre de contrats annuels à venir.
En 2015, l'entreprise PiscinePlus dénombrait 75 contrats souscrits.
On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de contrats souscrits auprès de l'entreprise PiscinePlus l'année $2015+n$. Ainsi, on a $u_0 = 75$.

1.

1. a. Estimer le nombre de contrats d'entretien en 2016.

1. b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 1,12u_n - 6$.

2. L'entreprise PiscinePlus peut prendre en charge un maximum de 100 contrats avec son nombre actuel de salariés. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel.

On cherche à connaître en quelle année l'entreprise devra embaucher. Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

L1	**Variables :**	n est un nombre entier naturel
L2		U est un nombre réel
L3	**Traitement :**	Affecter à n la valeur 0
L4		Affecter à U la valeur 75
L5		Tant que $U \leqslant 100$ faire
L6		n prend la valeur $n+1$
L7		U prend la valeur $1,12U - 6$
L8		Fin Tant que
L9	**Sortie :**	Afficher ...

2. a. Recopier et compléter la ligne L9.

2. b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus. On arrondira les résultats à l'unité.

Valeur de n	0		
Valeur de U	75		

2. c. Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme puis interpréter cette valeur dans le contexte de cet exercice.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 1,12u_n - 6 \text{ et } u_0 = 75$$

On pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 50$.

3. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

3. b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25 \times 1,12^n + 50$.

3. c. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n > 100$.

3. d. Quel résultat de la question 2 retrouve-t-on ?

Réponses
Le corrigé détaillé sur www.math93.com

Exercice 4. Polynésie Juin 2016 (Ex. 2 - Commun) 7 points

Commun à tous les candidats

Une entreprise s'intéresse au nombre d'écrans 3D qu'elle a vendus depuis 2010 :

Année	2010	2011	2012
Nombre d'écrans 3D vendus	0	5 000	11 000

Le nombre d'écrans 3D vendus par l'entreprise l'année $(2010+n)$ est modélisé par une suite (u_n), arithmético-géométrique, de premier terme $u_0 = 0$. On rappelle qu'une suite arithmético-géométrique vérifie, pour tout entier naturel n, une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = a \times u_n + b$ où a et b sont deux réels.

1.

1. a. En supposant que $u_1 = 5000$, déterminer la valeur de b.

1. b. En supposant de plus que $u_2 = 11\,000$, montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 1,2 \times u_n + 5000.$$

2.

2. a. Calculer u_3 et u_4.

2. b. En 2013 et 2014, l'entreprise a vendu respectivement 18 000 et 27 000 écrans 3D. La modélisation semble-t-elle pertinente ?

Dans toute la suite, on fait l'hypothèse que le modèle est une bonne estimation du nombre d'écrans 3D que l'entreprise va vendre jusqu'en 2022.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n + 25\,000.$$

3. a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,2. Préciser la valeur de son premier terme v_0.

3. b. Montrer que pour tout entier naturel : n on a : $u_n = 25\,000 \times 1,2^n - 25\,000$.

4. On veut connaître la première année pour laquelle le nombre de ventes d'écrans dépassera 180 000 unités.

4. a. Prouver que résoudre l'inéquation $u_n > 180\,000$ revient à résoudre l'inéquation $1,2^n > 8,2$.

4. b. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il détermine et affiche le plus petit entier naturel n, solution de l'inéquation $1,2^n > 8,2$.

```
Variables :       N est un entier naturel
                  W est un nombre réel
Initialisation :  N prend la valeur 0
                  W prend la valeur ......
Traitement :      Tant que ......
                     | W prend la valeur W × 1,2
                     | ......
                  Fin du Tant que
Sortie :          Afficher ...
```

4. c. Déterminer cet entier naturel n.

4. d. À partir de 2023, l'entreprise prévoit une baisse de 15 % par an du nombre de ses ventes d'écrans 3D. Combien d'écrans 3D peut-elle prévoir de vendre en 2025 ?

Réponses
Le corrigé détaillé sur www.math93.com

Partie 2 : Suites et Quelques particularités

Exercice 5. (c) Amérique du Sud, Novembre 2015 (Ex. 3 - Obligatoire) 5 points

Remarque
Avec des probabilités

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité, de la série L

Claudine est une passionnée de lecture abonnée à l'hebdomadaire littéraire « La Lecture ». Elle se rend une fois par semaine à la bibliothèque et elle demande ou non l'avis du bibliothécaire sur le livre mis en valeur dans l'hebdomadaire « La Lecture ». Son souhait de demander un avis change d'une semaine sur l'autre selon le plaisir qu'elle a eu à lire le livre et selon la pertinence du conseil donné par le bibliothécaire la semaine précédente.
La première semaine, on suppose que la probabilité que Claudine demande un avis vaut $0,1$.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note a_n la probabilité que Claudine demande un avis la n-ième semaine. On a ainsi $a_1 = 0,1$.
On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a : $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$.

1. Calculer la probabilité a_2 que Claudine demande un avis la deuxième semaine.

2. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on définit la suite (v_n) par : $v_n = a_n - 0,8$.

2. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,5$. Préciser son premier terme v_1.

2. b. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a : $a_n = 0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1}$.

2. c. Déterminer la limite de la suite (v_n).

2. d. En déduire la limite de la suite (a_n). Interpréter ce résultat.

3. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	A est un réel N est un entier naturel L est un réel strictement compris entre $0,1$ et $0,8$
INITIALISATION :	A prend la valeur $0,1$ N prend la valeur 1
TRAITEMENT :	Tant que $A \leqslant L$ N prend la valeur $N+1$ A prend la valeur $0,5 \times A + 0,4$ Fin du Tant que
SORTIE :	Afficher N

3. a. Pour la valeur $L = 0,7$, recopier et compléter autant que nécessaire les colonnes du tableau suivant :

Valeur de N	1	2	...	
Valeur de A	0,1		...	
Condition $A \leqslant L$	vraie		...	

3. b. En déduire l'affichage de N obtenu en sortie d'algorithme quand la valeur de L est $0,7$.

3. c. Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment on peut interpréter le nombre N obtenu en sortie de l'algorithme quand le nombre L est compris strictement entre $0,1$ et $0,8$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis soit supérieure à $0,799$.

Corrections

Correction de l'exercice 5 : Amérique du Sud, Novembre 2015

Claudine est une passionnée de lecture abonnée à l'hebdomadaire littéraire « La Lecture ». Elle se rend une fois par semaine à la bibliothèque et elle demande ou non l'avis du bibliothécaire sur le livre mis en valeur dans l'hebdomadaire « La Lecture ». Son souhait de demander un avis change d'une semaine sur l'autre selon le plaisir qu'elle a eu à lire le livre et selon la pertinence du conseil donné par le bibliothécaire la semaine précédente. La première semaine, on suppose que la probabilité que Claudine demande un avis vaut $0,1$. *Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note* a_n *la probabilité que Claudine demande un avis la n-ième semaine. On a ainsi* $a_1 = 0,1$. *On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :* $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$.

1. **Calculer la probabilité a_2 que Claudine demande un avis la deuxième semaine.**

$$a_2 = 0,5 \times a_1 + 0,4 = 0,5 \times 0,1 + 0,4 = \underline{0,45}$$

La probabilité que Claudine demande un avis la deuxième semaine est égale à 0,45.

2. *Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on définit la suite* (v_n) *par :* $v_n = a_n - 0,8$.

2. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,5$. Préciser son premier terme v_1.

Les suites (a_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(a_n) : \begin{cases} a_0 & = 0,1 \\ a_{n+1} & = 0,5 \times a_n + 0,4 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = a_n - 0,8 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - 0,8 \\ v_{n+1} &= (0,5\ a_n + 0,4) - 0,8 \\ v_{n+1} &= 0,5 \times a_n - 0,4 \\ v_{n+1} &= 0,5 \times \left(a_n + \frac{-0,4}{0,5}\right) \\ v_{n+1} &= 0,5 \times (a_n - 0,8) \\ v_{n+1} &= 0,5 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une <u>suite géométrique</u> de raison $q = 0,5$, et de premier terme $v_0 = -0,7$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= a_0 - 0,8 \\ v_0 &= 0,1 - 0,8 \\ v_0 &= -0,7 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = -0,7 \\ v_{n+1} & = 0,5 \times v_n \end{cases} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. b. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a : $a_n = 0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1}$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$, et de premier terme $v_0 = -0,7$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \, ; \ v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \, ; \ v_n = -0,7 \times (0,5)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = a_n - 0{,}8$$

On peut en déduire l'expression :

$$a_n = v_n + 0{,}8$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ a_n = -0{,}7 \times (0{,}5)^n + 0{,}8}$$

2. c. Déterminer la limite de la suite (v_n).

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$; or on a $0 < 0,5 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente et a pour limite 0.

2. d. En déduire la limite de la suite (a_n). Interpréter ce résultat.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \\ a_n = v_n + 0,8 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0,8$$

Cela signifie que, quand le nombre de semaines deviendra très grand, Claudine va demander un avis 8 fois sur 10.

3. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	A est un réel N est un entier naturel L est un réel strictement compris entre $0,1$ et $0,8$
INITIALISATION :	A prend la valeur $0,1$ N prend la valeur 1

TRAITEMENT :	Tant que $A \leqslant L$
	    N prend la valeur $N+1$
	    A prend la valeur $0,5 \times A + 0,4$
	Fin du Tant que

SORTIE :	Afficher N

3. a. Pour la valeur $L = 0,7$, on complète les colonnes du tableau suivant :

Valeur de N	1	2	3	4
Valeur de A	0,1	0,45	0,625	0,712 5
Condition $A \leqslant L$	vraie	vraie	vraie	fausse

3. b. L'affichage de N obtenu en sortie d'algorithme quand la valeur de L est $0,7$ est donc 4.

3. c. Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment on peut interpréter le nombre N obtenu en sortie de l'algorithme quand le nombre L est compris strictement entre $0,1$ et $0,8$.

Le nombre N obtenu par l'algorithme quand le nombre L est compris entre 0,1 et 0,8 est le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis est supérieur à L.

4. Déterminer le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis soit supérieure à $0,799$.

On cherche n tel que $a_n > 0,799$:

$$\begin{aligned} a_n > 0,799 &\Longleftrightarrow 0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1} > 0,799 \\ &\Longleftrightarrow -0,7 \times 0,5^{n-1} > -0,001 \\ &\Longleftrightarrow 0,5^{n-1} < \frac{0,001}{0,7} \end{aligned}$$

On compose par la fonction ln strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$

$$\begin{aligned} a_n > 0,799 &\Longleftrightarrow \ln 0,5^{n-1} < \ln \frac{0,001}{0,7} \\ &\Longleftrightarrow (n-1)\ln 0,5 < \ln \frac{0,001}{0,7} \end{aligned}$$

On divise par $\ln 0,5 < 0$

$$\begin{aligned} a_n > 0,799 &\Longleftrightarrow (n-1) < \frac{\ln\left(\frac{0,001}{0,7}\right)}{\ln 0,5} \\ &\Longleftrightarrow n < \frac{\ln\left(\frac{0,001}{0,7}\right)}{\ln 0,5} + 1 \end{aligned}$$

Or on a

$$\frac{\ln\left(\frac{0,001}{0,7}\right)}{\ln 0,5} + 1 \approx 10,5$$

donc le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis est supérieur à 0,799 est 11.