Math93.com

Complexes - Partie 1
Forme Algébrique
Terminale S

ROC
Les **ROC, (Restitution Organisée de Connaissances)**, sont les démonstrations du cours à connaître indiquées explicitement dans le nouveau programme de terminale S entré en vigueur à la rentrée 2012. Ce chapitre ne compte pas de ROC.

I Une approche historique

Des équations du premier et du second degré (où les coefficients sont des nombres donnés) sont déjà résolues avec une méthode générale par les Babyloniens vers 1700 av. J.C et peut être même plus tôt.
Pour les équations du 3^e degré, il faut attendre 1515 avec l'italien Scipio del Ferro (1465-1526) dont les papiers sont cependant perdus. Puis ses compatriotes Nicolo Tartaglia et Gérolamo Cardano (1501-1576) poursuivent ses travaux.
La méthode de résolution des équations de 3^e degré va être possible grâce à une astuce de calcul intermédiaire qui utilise la racine carrée de nombre négatif.
Et voici que l'on en vient à considérer de nouvelles entités, pas encore considérées comme des nombres : $a+b\sqrt{-1}$.
Les complexes ne seront vraiment admis par l'ensemble de la communauté scientifique qu'au 18^e siècle, après que les mathématiciens apprirent à les représenter avec le plan d'Argand-Cauchy.

Pour en savoir plus : www.math93.com/...Les nombres complexes

II Forme algébrique d'un nombre complexe

II.1 Une définition de $\mathbb{C}$

Théorème 1 (L'ensemble des complexes)

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes ou imaginaire**, qui possède les propriétés suivantes :

1. l'ensemble des nombres réel $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$ soit $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;
2. l'ensemble $\mathbb{C}$ possède un élément noté i tel que $\mathbf{i^2 = -1}$;
3. tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière <u>unique</u> sous la forme $\boldsymbol{z = a + \mathrm{i}\, b}$ où a et b sont des nombres réels;
4. l'addition et la multiplication des réels se prolongent aux nombres complexes en remplaçant i^2 par (-1).

Définition 1 (Forme algébrique : partie réelle et partie imaginaire)

L'écriture $z = a + \mathrm{i}\, b$ où a et b sont des nombres réels est la **forme algébrique de z**.

- <u>Partie réelle</u> : a est la **partie réelle de z** et se note **Re** (z).
- <u>Partie imaginaire</u> : b est la **partie imaginaire de z** et se note **Im** (z).

Exemple

- Si $z_1 = -2+3\,\mathrm{i}$ on a : $\Re(z_1) = -2$ et $\mathrm{Im}\,(z_1) = 3$.
- Si $z_2 = \sqrt{2}$ on a : $\Re(z_2) = \sqrt{2}$ et $\mathrm{Im}\,(z_2) = 0$.
On dit dans ce cas que z_2 est un **réel**.
- Si $z_3 = -\,\mathrm{i}$ on a : $\Re(z_3) = 0$ et $\mathrm{Im}\,(z_3) = -1$.
On dit dans ce cas que z_3 est un **imaginaire pur**.
- 0 est le seul complexe à **la fois réel et imaginaire pur**.

II.2 Additions et multiplications dans $\mathbb{C}$

Propriété 1 (Somme de deux complexes)

Soit z et z' deux nombres complexes de formes algébriques : $z = a + \mathrm{i}\, b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\, b'$.

$$z + z' = (a + \mathrm{i}\, b) + \left(a' + \mathrm{i}\, b'\right) = \left(a + a'\right) + \mathrm{i}\, \left(b + b'\right)$$

Propriété 2 (Produit de deux complexes)

Soit z et z' deux nombres complexes de formes algébriques : $z = a + \mathrm{i}\, b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\, b'$.

$$zz' = (a + \mathrm{i}\, b) \times \left(a' + \mathrm{i}\, b'\right) = \left(aa' - bb'\right) + \mathrm{i}\, \left(ab' + ba'\right)$$

Exemple

Soit z et z' deux nombres complexes de formes algébriques : $z = -2 + 3\,\mathrm{i}$ et $z' = 5 - 7\,\mathrm{i}$.

- $z + z' = -2 + 3\,\mathrm{i} + 5 - 7\,\mathrm{i} = (-2+5) + \mathrm{i}\,(3-7) = \underline{3 - 4\,\mathrm{i}}$.
  On ajoute les partie réelles entre elles et les parties imaginaires entre elles.
- Pour le produit, on développe en appliquant la double distributivité et on remplace i^2 par (-1) :

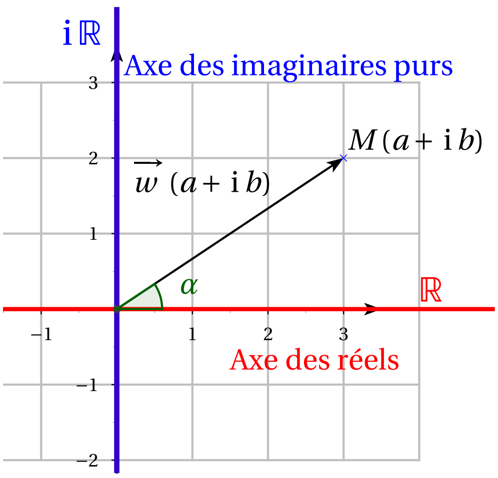
$$\begin{aligned} zz' &= (-2 + 3\,\mathrm{i}) \times (5 - 7\,\mathrm{i}) \\ zz' &= -10 + 14\,\mathrm{i} + 15\,\mathrm{i} - 21\left(\mathrm{i}^2\right) \\ zz' &= -10 + 29\,\mathrm{i} - 21 \times (-1) \\ zz' &= \underline{11 + 29\,\mathrm{i}} \end{aligned}$$

II.3 Représentation dans le plan complexe : le plan d'Argand-Cauchy

Définition 2

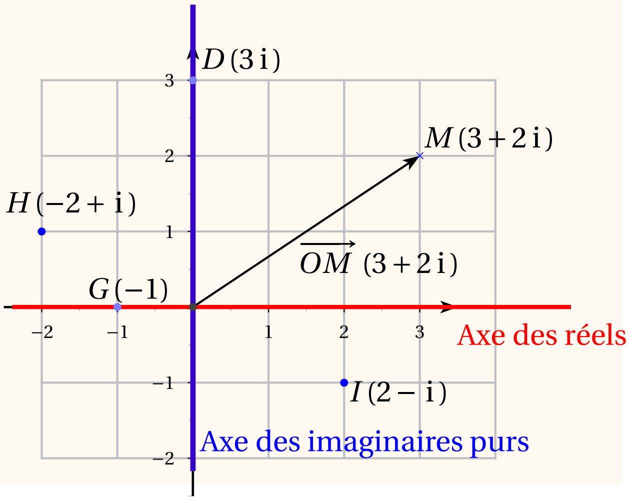
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct :

- à tout nombre complexe $z = a + \mathrm{i}\, b$, (où a et b sont réels), on associe le point $M(a\,;\ b)$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \overrightarrow{w}$ qui sont le **point image** et le **vecteur image de z** ;
- à tout point $M(a\,;\,b)$ et vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \overrightarrow{u}$ on associe le nombre complexe $z = a + \mathrm{i}\, b$ appelé **affixe de M** et **affixe de $\overrightarrow{w}$** .
- Le plan est alors appelé le **plan complexe**.



Exemple

- Le point image d'un réel appartient à l'axe des abscisses, c'est **l'axe des réels**. Par exemple ici $G(-1)$ est le point image du réel (-1).
- Si la partie imaginaire du complexe est nulle alors $z = b\,\mathrm{i}$ et le point image appartient à l'axe des ordonnées, c'est l'**axe des imaginaires purs**. Par exemple ici $D(3\,\mathrm{i})$ est le point image de l'imaginaire pur $3\,\mathrm{i}$.



Remarque historique

Le mathématicien suisse Jean-Robert Argand (1768-1822) introduit en 1806 la configuration plane des nombres complexes. Cette dernière est faite avant lui par Wessel (1745-1818) dans l'article "Sur la représentation analytique d'une direction" qui associe à tout nombre complexe un vecteur d'origine 0 et interprète sur ces vecteurs les opérations élémentaires sur les complexes. Cette publication passe cependant inaperçue à l'époque et les travaux de Wessel ne seront retrouvés qu'en 1897. Pour en savoir plus : www.math93.com/... le plan d'Argand-Cauchy

II.4 Propriétés

Propriété 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Soit les points A et B d'affixes z_A et z_B alors :

- **le vecteur $\overrightarrow{AB}$** a pour affixe $(z_B - z_A)$;
- **le milieu I** du segment $[AB]$ a pour affixe $\boxed{z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}}$.
- Soit $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ d'affixes z et z'. Alors :
  - Le **vecteur somme** $\vec{w} + \vec{w'}$ d'affixe $z + z'$.
  - Le **produit par un réel** $k\,\vec{w}$ d'affixe $k\,z$.

II.5 Égalité de deux complexes

Propriété 4

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Remarques

- Un complexe est réel si, et seulement si, sa partie imaginaire est nulle soit :

$$\boxed{z \in \mathbb{R} \iff \text{Im}\,(z) = 0}$$

- Un complexe est imaginaire pur si, et seulement si, sa partie réelle est nulle soit :

$$\boxed{z \in \text{i}\,\mathbb{R} \iff \Re(z) = 0}$$

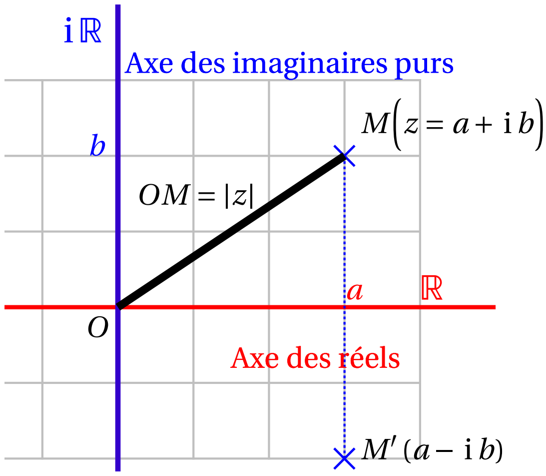
III Conjugué et module

III.1 Définitions : Conjugué et module

Définition 3

On se place dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit $z = a + \text{i}\,b$ un complexe de point image M.

- Le nombre complexe **conjugué de z**, noté $\overline{z}$ est le nombre complexe : $\boxed{\overline{z} = a - \text{i}\,b}$.
- Les points d'affixes z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.
- Le **module du complexe z**, noté $|z|$ est égal à la distance OM soit : $\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$.



III.2 Premières propriétés

Propriété 5

On se place dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit $z = a + \text{i}\,b$ un complexe de point image M.

1. $\boxed{|z|^2 = z\overline{z} = a^2 + b^2}$.
2. $\boxed{z + \overline{z} = 2\text{Re}\,(z) = 2a}$ et $\boxed{z - \overline{z} = 2\,\text{i}\,\text{Im}\,(z) = 2b\,\text{i}}$
3. Le conjugué de $\overline{z}$ est : $\boxed{\overline{\overline{z}} = z}$.

III.3 Calcul de longueur

Propriété 6

On se place dans un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit deux points A et B d'affixes z_A et z_B.
La distance AB est, en unité de longueur :

$$AB = |z_B - z_A|$$

IV Opérations sur les complexes

IV.1 Inverse et quotient

Propriété 7 (Admise)

Tout nombre complexe non nul z admet dans $\mathbb{C}$ un inverse noté $\frac{1}{z}$. On a :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + \mathrm{i}\,b} = \frac{a - \mathrm{i}\,b}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}}$$

Exemple

Pour déterminer la forme algébrique de l'inverse d'un complexe, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué :
Par exemple avec $z = 3 - 2\,\mathrm{i}$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{3-2\,\mathrm{i}} = \frac{3+2\,\mathrm{i}}{(3-2\,\mathrm{i})(3+2\,\mathrm{i})} \\
&= \frac{3+2\,\mathrm{i}}{3^2+2^2} = \frac{3+2\,\mathrm{i}}{13} \\
\frac{1}{3-2\,\mathrm{i}} &= \frac{3}{13} + \frac{2}{13}\,\mathrm{i}
\end{aligned}$$

IV.2 Propriété du conjugué

Propriété 8

1. Un nombre complexe z est réel si et seulement si il est égal à son conjugué $z = \overline{z}$.

$$\boxed{z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}}$$

2. Un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si il est égal à l'opposé de son conjugué $z = -\overline{z}$.

$$\boxed{z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\overline{z}}$$

Preuve

1. Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$. On a alors :

$$z = \overline{z} \Longleftrightarrow a + \mathrm{i}\,b = a - \mathrm{i}\,b \Longleftrightarrow b = -b \Longleftrightarrow b = 0 \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

2. Et :

$$z = -\overline{z} \Longleftrightarrow a + \mathrm{i}\,b = -a + \mathrm{i}\,b \Longleftrightarrow a = -a \Longleftrightarrow a = 0 \Longleftrightarrow z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$$

Propriété 9

Pour tous nombres complexes z et z' on a :

1. $\boxed{\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}}$
2. $\boxed{\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}}$
3. Pour $z\neq 0$, on a : $\boxed{\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}}$
4. Pour $z\neq 0$, on a : $\boxed{\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)}=\dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}}$

Preuve

Pour tous nombres complexes z et z' on a :

1. $z+z'=a+a'+\mathrm{i}\,(b+b')$ donc
$$\overline{z+z'}=a+a'-\mathrm{i}\,(b+b')=(a-\mathrm{i}\,b)+(a'-\mathrm{i}\,b')=\overline{z}+\overline{z'}$$
2. $zz'=(a+\mathrm{i}\,b)\times\left(a'+\mathrm{i}\,b'\right)=\left(aa'-bb'\right)+\mathrm{i}\,\left(ab'+ba'\right)$ donc
$$\overline{zz'}=\left(aa'-bb'\right)-\mathrm{i}\,\left(ab'+ba'\right)$$
Par ailleurs
$$\overline{z}\,\overline{z'}=(a-\mathrm{i}\,b)(a'-\mathrm{i}\,b')=\left(aa'-bb'\right)-\mathrm{i}\,\left(ab'+ba'\right)$$
Donc
$$\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$$
3. Pour $z\neq 0$, on a :
$$\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$$
Donc puisque $|z|^2$ est un réel strictement positif on a :
$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{\overline{\overline{z}}}{|z|^2}=\frac{z}{|z|^2}=\frac{z}{z\overline{z}}=\frac{1}{\overline{z}}$$
4. Pour $z\neq 0$, on a en appliquant la propriété du produit (2) :
$$\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\overline{z'}\times\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$$
Puis en appliquant la propriété de l'inverse (3) :
$$\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\overline{z'}\times\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\overline{z'}\times\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)=\frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$$

Propriété 10

Pour tout complexe z et tout entier naturel n non nul on a :

$$\boxed{\overline{\left(z^n\right)}=\left(\overline{z}\right)^n}$$

Preuve

Cette propriété se démontre par récurrence. A faire en exercice.

IV.3 Propriétés du module

IV.3.1 Propriétés liées à la définition (et rappels)

Propriété 11

Dans le plan complexe, on se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Le **module du complexe** z, noté $|z|$ est égal à la distance OM soit : $\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$.
2. $\boxed{|z|^2 = z\overline{z} = a^2+b^2}$.
3. Pour tout z complexe, on a $|z|$ est un réel positif.
4. $|z| = 0 \iff z = 0$

IV.3.2 Propriétés du module

Propriété 12

Dans le plan complexe, on se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Pour tous complexes z et z' et tout entier naturel n.

1. Produit : $\left|z \times z'\right| = |z| \times \left|z'\right|$.
2. Puissance : $|z^n| = |z|^n$
3. Inverse : pour $z \neq 0$ on a : $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
4. Quotient : pour $z' \neq 0$ on a : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

Preuve

On pose $z = a + \mathrm{i}\, b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\, b'$ et on cherche les parties réelles et imaginaires de chaque membre.

IV.3.3 Inégalité triangulaire

Propriété 13 (Inégalité triangulaire (Admise))

Pour tous complexes z et z' on a :

$$\boxed{\left|z+z'\right| \leq |z| + \left|z'\right|}$$

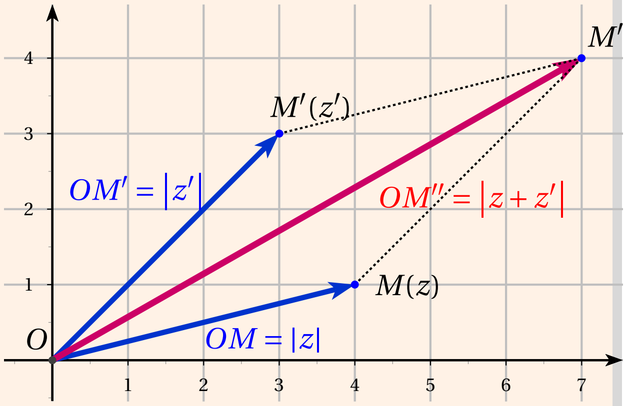
Cas d'égalité (Hors Programme)
On peut montrer que $\left|z+z'\right| = |z| + \left|z'\right|$ si et seulement si il existe deux réels positifs a et b, $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ tels que $az = bz'$.

Remarque

On se place dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ du plan complexe.
Soit les points $M(z)$, $M'(z')$ et $M''(z+z')$.
Soit les vecteurs $\overrightarrow{OM}(z)$ et $\overrightarrow{OM'}(z')$ et le vecteur somme $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM''}$ est d'affixe $(z+z')$.
Ainsi le quadrilatère OMM"M' est un parallélogramme.
L'inégalité $\left|z+z'\right| \leq |z| + \left|z'\right|$ signifie que

$$OM'' \leq OM + MM''$$

d'où le nom de cette inégalité.



V Ensembles de points

V.1 Alignement et parallélisme

Propriété 14

Dans le plan complexe, on se place dans le repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts alors :
   A, B et C alignés si et seulement si il existe un réel λ tel que : $\boxed{z_{\overrightarrow{AC}} = \lambda z_{\overrightarrow{AB}}}$
2. Si A, B, C, D sont quatre points deux à deux distincts alors :
   Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si il existe un réel λ tel que : $\boxed{z_{\overrightarrow{CD}} = \lambda z_{\overrightarrow{AB}}}$

V.2 Médiatrice

Propriété 15 (Médiatrice)

Dans le plan complexe, on se place dans le repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit z_A et z_B deux nombres complexes d'images respectives A et B dans le plan complexe.

L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la **médiatrice de [AB]**.

Preuve

$$|z - z_A| = |z - z_B| \iff AM = BM \iff M \in \text{médiatrice du segment } [AB]$$

V.3 Cercle et disque

Propriété 16

Soit ω un nombre complexe d'images Ω dans le plan complexe, et r un réel strictement positif.

1. L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - \omega| = r$ est le **cercle de centre Ω et de rayon r**.
2. L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - \omega| < r$ est le **disque ouvert de centre Ω et de rayon r**.

Preuve

On se place dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Soit ω un nombre complexe d'images Ω dans le plan complexe, et r un réel strictement positif.

1. Soit M d'affixe z telle que $|z-\omega| = r$:

$$|z-\omega| = r \iff \Omega M = r \iff M \in \mathscr{C}(\Omega\ ;\ r)$$

2. Soit M d'affixe z telle que $|z-\omega| < r$:

$$|z-\omega| < r \iff \Omega M < r \iff M \in \mathscr{D}(\Omega\ ;\ r)$$

VI Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

VI.1 Équations de la forme $z^2 = a$, avec a réel

Propriété 17

Soit a un nombre réel. On cherche à résoudre l'équation $z^2 = a$.

1. Si $a = 0$, l'équation $z^2 = a$ admet une unique solution qui est $z = 0$.
2. Si $a > 0$, l'équation $z^2 = a$ admet deux solutions réelles qui sont $z = \sqrt{a}$ et $z = -\sqrt{a}$.

$$\boxed{\begin{cases} z^2 = a \\ a > 0 \end{cases} \iff z = \sqrt{a} \ \text{ ou } \ z = -\sqrt{a}}$$

3. Si $a < 0$, l'équation $z^2 = a$ admet deux solutions complexes conjuguées qui sont $z = \mathrm{i}\sqrt{|a|}$ et $z = -\mathrm{i}\sqrt{|a|}$.

$$\boxed{\begin{cases} z^2 = a \\ a < 0 \end{cases} \iff z = \mathrm{i}\sqrt{|a|} \ \text{ ou } \ z = -\mathrm{i}\sqrt{|a|}}$$

Preuve

Les cas 1 et 2 ont été traités en seconde (et troisième). Supposons que $a < 0$, alors :

$$a = (-1) \times |a| \iff a = \mathrm{i}^2 \times |a|$$

De ce fait :

$$\begin{aligned} z^2 = a &\iff z^2 = \mathrm{i}^2 \times |a| \\ &\iff z^2 = \mathrm{i}^2 \times \left(\sqrt{|a|}\right)^2 \\ &\iff z^2 - \left(\mathrm{i}\sqrt{|a|}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(z - \mathrm{i}\sqrt{|a|}\right)\left(z + \mathrm{i}\sqrt{|a|}\right) = 0 \\ &\iff z = \mathrm{i}\sqrt{|a|} \ \text{ ou } \ z = -\mathrm{i}\sqrt{|a|} \end{aligned}$$

VI.2 Équations du second degré à coefficients réels

Propriété 18 (Équation du second degré $az^2+bz+c=0$)

Soit l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue z, où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
Le discriminant de cette équation est le réel $\Delta = b^2-4ac$.

1. Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $\boxed{z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$.
2. Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution réelle : $\boxed{z_0 = \dfrac{-b}{2a}}$.
3. Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions imaginaires conjuguées distinctes :

$$\boxed{z_1 = \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}}$$

Preuve

Les cas 1 et 2 ont été traités en première. Supposons donc que $\Delta < 0$ et bien sûr que $a \neq 0$. On reprend le début de la démonstration de première, jusqu'à l'obtention de la forme canonique.

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c=0 &\iff a\left[z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right]=0\\
&\iff a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=0\\
&\iff a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0
\end{aligned}$$

Puisque $\Delta < 0$ on peut écrire $\Delta = -|\Delta| = \mathrm{i}^2|\Delta|$ soit :

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c=0 &\iff a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\mathrm{i}^2|\Delta|}{4a^2}\right]=0\\
&\iff a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)^2\right]=0\\
&\iff a\left[\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\right]=0\\
&\iff a\left[\left(z-\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\right]=0\\
az^2+bz+c=0 &\iff z=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ ou } z=\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}
\end{aligned}$$

Aide

Dans la pratique, lorsque le discriminant est négatif, on cherchera à l'écrire sous la forme $(\mathrm{i}\,|\Delta|)^2$. Par exemple pour résoudre l'équation $z^2+z+1=0$, on écrira

$$\Delta = -3 = \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 \Longrightarrow z_1 = \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$