Math93.com

Nombres complexes (2)
Forme exponentielle

Terminale S

I Forme trigonométrique d'un nombre complexe non-nul

I.1 Module d'un nombre complexe

Définition 1

Le module du complexe z d'écriture algébrique $a + ib$ est le réel positif noté $|z|$ tel que

$$|z| = \sqrt{z\ \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

autrement dit $|z|^2 = z\ \overline{z}$.

Remarque

Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\ \overline{a}} = \sqrt{a^2} = |a|$ donc le module de a est bien la valeur absolue de a et la notation utilisée pour le module est cohérente.
La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

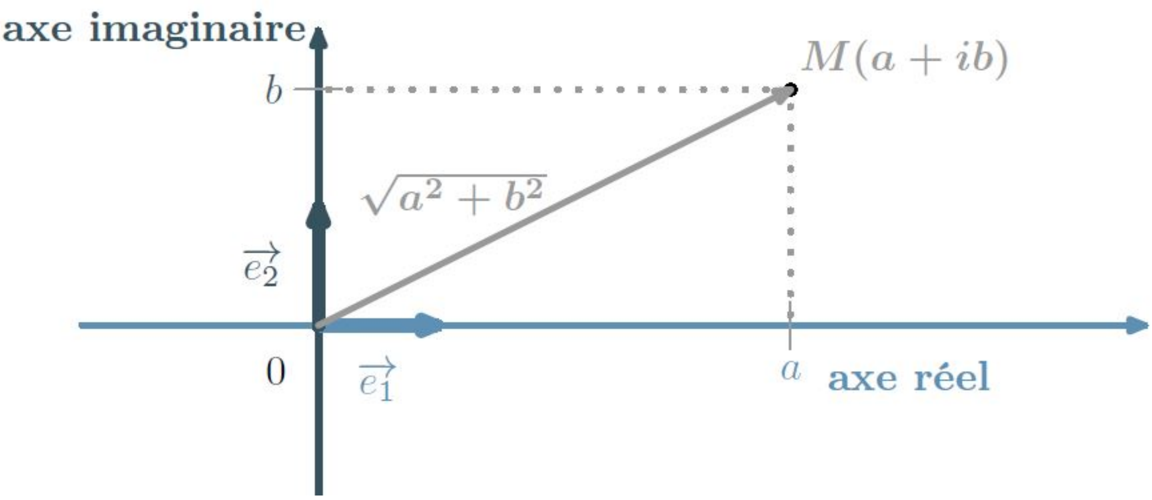
Propriétés du module

Propriété 1

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$
- $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ avec $z_2 \neq 0$

Interprétation géométrique

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, on considère le point M d'affixe z d'écriture algébrique $a + ib$. On a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ qui n'est autre que la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ c'est-à-dire la distance OM.



I.2 Argument d'un nombre complexe

I.2.1 Définition

Définition 2 (Argument et argument principal)

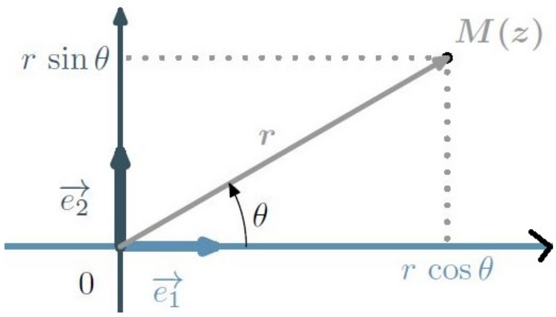
Dans le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \overrightarrow{e_1}\ ;\ \overrightarrow{e_2})$, soit z un nombre complexe **non nul** et M le point du plan d'affixe z.

1. On appelle **argument de** z, noté $\arg(z)$, toute mesure en radians de l'angle de vecteur $\left(\overrightarrow{e_1}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$

$$\boxed{\arg(z) = \theta = \left(\overrightarrow{e_1}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)}\ \text{, où } M(z)$$

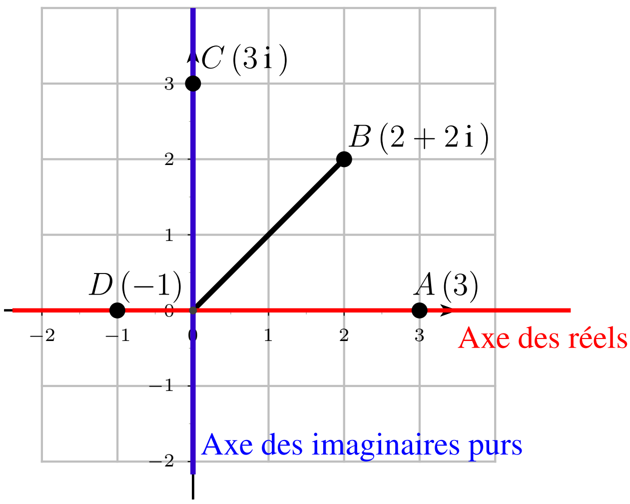
2. Tout complexe z non nul admet une **infinité d'arguments**.
Si θ est un argument de z alors $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est aussi un argument de z.

3. Tout complexe z non nul admet un unique argument dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.
C'est l'**argument principal** de z.



I.2.2 Exemples

z	3	$2+2i$	$3i$	-1
$\lvert z\rvert$	3	$2\sqrt{2}$	3	1
$\arg(z)$	$0\ [2\pi]$	$\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$	$\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$	$\pi\ [2\pi]$
Point	$A(3)$	$B(2+2i)$	$C(3i)$	$D(-1)$



I.2.3 Premières propriétés de l'argument

Propriété 2 (propriétés de l'argument)

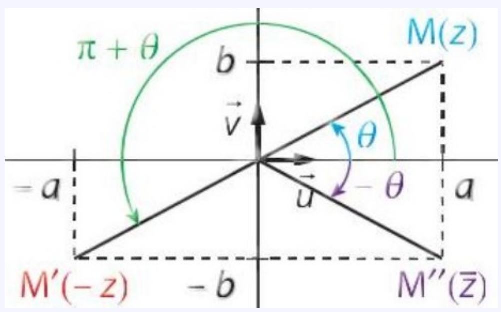
Soit z un nombre complexe non nul.

1. z est un **réel non nul** si et seulement si $\arg(z) = 0\ \ [2\pi]$ ou $\arg(z) = \pi\ \ [2\pi]$.

2. z est un **imaginaire pur non nul** si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2}\ \ [2\pi]$ ou $\arg(z) = \frac{-\pi}{2}\ \ [2\pi]$.

3. $\boxed{\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ \ [2\pi]}$.

4. $\boxed{\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ \ [2\pi]}$.



I.3 Forme trigonométrique

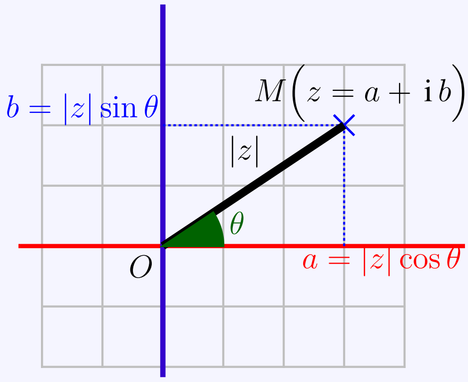
La donnée d'un réel positif r et d'un angle θ permet de définir un unique point M d'affixe $z \neq 0$ du plan complexe tel que $OM = r$ et $\left(\overrightarrow{e_1}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right) = \theta$. On en déduit que $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

Propriété 3

Soit $z = a + \mathrm{i}\, b$ un nombre complexe, a et b réels.

1. Si z est non nul, alors z peut s'écrire sous la forme :
$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$
avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ \ [2\pi]$ qui est **appelée une forme trigonométrique de z.**
$$\boxed{z = |z|\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)}$$

2. Si $z = r\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)$, avec r, θ réels et $r > 0$ alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ \ [2\pi]$.



Preuve

1. Soit $z = a + \mathrm{i}\, b$, avec a et b réels et $z \neq 0$. Alors :
$$z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \mathrm{i}\,\frac{b}{|z|}\right) = |z|\left(\cos\theta + \mathrm{i}\ \sin\theta\right)$$

2. Soit $z = r\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)$, avec r, θ réels et $r > 0$ alors $|z| = \sqrt{r^2} = r$ car $r > 0$.
Par ailleurs, un argument de z a pour cosinus $\cos\theta$ et pour sinus $\sin\theta$, donc $\arg(z) = \theta$.

Remarque

Attention, si
$$z = -\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2} = -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
alors on a
$$z = -2\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
mais ce n'est pas la forme trigonométrique de z par $(-2 < 0)$.
La forme trigonométrique de z serait :
$$z = 2\left(\cos\frac{-3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{-3\pi}{4}\right)$$

I.4 Passage forme algébrique ⇔ forme trigonométrique

I.4.1 Un résultat intéressant

Propriété 4

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
2. Réciproquement, pour tout réel x et tout réel y tels que $x^2 + y^2 = 1$, il existe un réel θ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$.

Preuve

Éléments de preuve.

1. Il suffit d'utiliser la formule $\cos(a - b)$ avec $a = b = \theta$. Pour démontrer cette formule, on commence par prouver que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(\alpha - x)\cos x - \sin(\alpha - x)\sin x$ est constante puis on remplace α par $(a + b)$ et x par b.
2. Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$.
   - On a alors : $x^2 \leqslant 1$ et donc $|x| \leqslant 1$ soit $x \in [-1\ ;\ 1]$.
     Les variations sur $[0\ ;\ \pi]$ de la fonction cosinus montrent qu'elle atteint tout réel de $[-1\ ;\ 1]$. Étant continue, on peut appliquer le corolaire du TVI. Il existe donc un réel $\theta_0 \in [0\ ;\ \pi]$ tel que $x = \cos\theta_0$.
   - On a donc :
     $$\sin^2\theta_0 = 1 - \cos^2\theta_0 = 1 - x^2 = y^2$$
     et donc
     $$y = \pm\sin\theta_0$$
     - Si $y = \sin\theta_0$, alors
       $$x = \cos\theta_0 \text{ et } y = \sin\theta_0$$
     - Si $y = -\sin\theta_0$, alors
       $$x = \cos(-\theta_0) \text{ et } y = \sin(-\theta_0)$$
   - Conclusion : on a bien trouvé $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$.

I.4.2 Propriétés

Soit $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique $a + ib$ et de forme trigonométrique $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ alors on a d'une part :

Propriété 5 (forme algébrique connaissant la forme trigonométrique)

Si $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r > 0$, Alors $z = a + \mathrm{i}\,b$ avec $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$.

$$\boxed{\begin{cases} z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ r > 0 \end{cases} \Longrightarrow z = a + \mathrm{i}\,b \text{ et } \begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}}$$

et d'autre part $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Si z est *non nul*, son module $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ sera non nul également. Ainsi, on peut écrire z sous la forme :

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \mathrm{i}\tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right. \\ z &= r\left(\tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \mathrm{i}\tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ z &= r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) \end{aligned}$$

On en déduit

Propriété 6 (forme trigonométrique en fonction de la forme algébrique)

Soit z un complexe non nul.

$$\boxed{z = a + \mathrm{i}\, b \neq 0 \Longrightarrow z = |z|\,(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) \quad , \quad \begin{cases} |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}}$$

Ainsi, connaissant a et b, on peut obtenir le module et un argument de $a + \mathrm{i}b$. On obtiendra une mesure exacte de θ si $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont des valeurs connues comme $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1, etc.
Sinon, on obtiendra une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

Remarque

- Les formes trigonométriques sont adaptés aux produits de complexes ;
- Les formes algébriques sont adaptées aux sommes de complexes.

I.5 Propriétés du module et de l'argument

Propriété 7 (Propriétés)

	z et z' complexes	**z et z' complexes non nuls**
Produit	$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\ \lvert z'\rvert$	$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
Puissance	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$
Inverse	$\left\lvert \frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$ si $z \neq 0$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
Quotient	$\left\lvert \frac{z}{z'}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$ si $z' \neq 0$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
Conjugué	$\lvert\overline{z}\rvert = \lvert z\rvert$	$\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ \ [2\pi]$
Opposé	$\lvert -z\rvert = \lvert z\rvert$	$\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ \ [2\pi]$

Preuve

Les propriétés du modules ont déjà été démontrées.
Soit z et z' des complexes non nuls

1. $\underline{\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]}$.

Soit $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$, alors

$$zz' = rr'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')$$

On reconnaît les formules d'addition, donc on en déduit :

$$zz' = z = rr'(\cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta)')$$

2. $\underline{\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]}$.
On démontre cette égalité par récurrence.

3. Inverse.
Soit z non nul, alors d'après le (1) on a :

$$\arg(1) = \arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) \quad (2\pi)$$

et puisque $\arg(1) = 0\ \ (2\pi)$, on obtient bien l'égalité :

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$$

4. Quotient.
Soit z' non nul, alors d'après le (1) on a :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) \quad (2\pi)$$

En appliquant maintenant le (3), on obtient bien l'égalité :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$$

II Forme Exponentielle

II.1 Définition

Soit f la fonction :

$$f : \left\{\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & f(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \end{array}\right.$$

- Le nombre complexe $f(\theta)$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.
- Le nombre complexe $f(\theta+\theta') = \cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta')$ a pour module 1 et pour argument $\theta+\theta'$.
- Or le nombre $f(\theta) \times f(\theta')$ a aussi pour module 1 et pour argument $\theta+\theta'$
car, pour z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls, on a

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2| \text{ et } \arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

- On en déduit que $f(\theta+\theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ de plus $f(0) = 1$ et même $f'(\theta) = \mathrm{i}\,f(\theta)$ si l'on étend la notion de dérivée à $\mathbb{C}$.
- La fonction f ainsi définie vérifie les propriétés de la fonction exponentielle, ce qui mène à la notation suivante (par convention) :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

Définition 3 (Forme exponentielle)

1. Tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ peut s'écrire :

$$z = re^{i\theta} \text{ ou } z = r(cos\theta + i\sin\theta),$$

2. et réciproquement, tout nombre complexe qui s'écrit :

$$z = re^{i\theta} \text{ ou } z = r(cos\theta + i\sin\theta),$$

avec r un réel strictement positif, a pour module r et pour argument $\theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

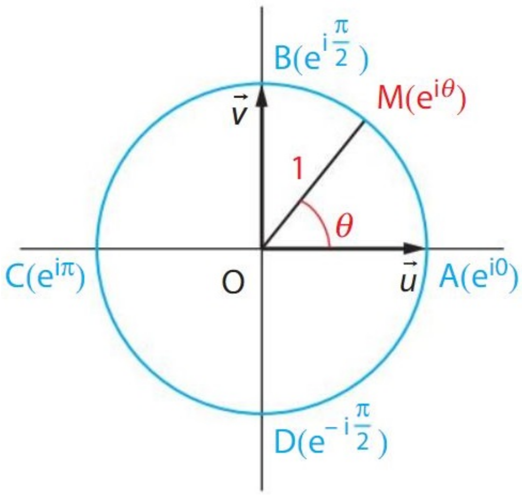
3. Bilan : pour z complexe non nul :

$$\boxed{z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)}\ , r \in \mathbb{R}_+^*, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

II.2 Exemples

$$e^{i0} = 1 \quad ; \quad e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad ; \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$



II.3 Propriétés

La forme exponentielle complexe possède des propriétés analogues à la fonction exponentielle réelle.

Propriété 8

Soit θ et θ' des réels quelconques et n un entier

$$\boxed{e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}} \quad \boxed{\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}} \quad \boxed{\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}} \quad \boxed{\overline{\left(e^{i\theta}\right)} = e^{-i\theta}} \quad \boxed{\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}}$$

Théorème 1 (Formule de Moivre)

Soit θ un réel et n un entier naturel.

$$\boxed{\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}} \Longrightarrow \boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

Remarque historique

Le mathématicien français Abraham de Moivre (1667 - 1754) démontre en 1738 cette formule qui apparait, de manière implicite, dans ses travaux en 1707. On trouve cette formule dans les travaux de DE MOIVRE mais il semble que COTES la connaissait déjà. Sa formulation actuelle et son extension à tout nombre réel n est due à EULER vers 1750.

Propriété 9 (Formules d'EULER)

Pour tout nombre réel θ, on a :

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta} \text{ , d'où } \boxed{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta} \text{ et } \boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1}$$

Remarque historique

L'**identité d'Euler** : $\boxed{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\pi} + 1 = 0}$.
C'est le mathématicien Leonhard Euler (1707-1783) qui donnera cette relation dans son *Introductio* en 1748. Elle est souvent citée comme un exemple de beauté mathématique .
En effet, outre l'égalité, trois des opérations fondamentales de l'arithmétique y sont utilisées, chacune une fois : l'addition, la multiplication et l'exponentiation. L'identité fait également intervenir cinq constantes mathématiques fondamentales : e , i , π, 1, 0.
Le mathématicien anglais Roger Cotes (mort en 1716, quand Euler avait seulement 9 ans) connaissait cette identité. Euler pourrait en avoir appris l'existence par son compatriote suisse Johann Bernoulli.

Exemples :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$$

On en déduit par addition et soustraction des égalités précédentes les résultats suivants.

Propriété 10

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}} \quad \boxed{\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}}$$

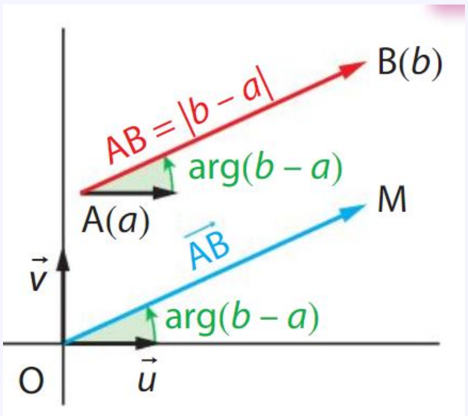
III Applications en géométrie

III.1 Propriétés

Dans le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B, C et D quatre points deux à deux distincts d'affixes respectivement z_A, z_B, z_C et z_D.
On a les relations suivantes :

Théorème 2

1. $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(z_B - z_A\right)$
2. $AB = |z_B - z_A|$
3. $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \quad (2\pi)$



Preuve

1. Soit M le point d'affixe $M(b-a)$. Alors

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB} \Longrightarrow \begin{cases} AB = OM = |b-a| \\ \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right) = \arg\left(b-a\right) \end{cases}$$

2. On a :

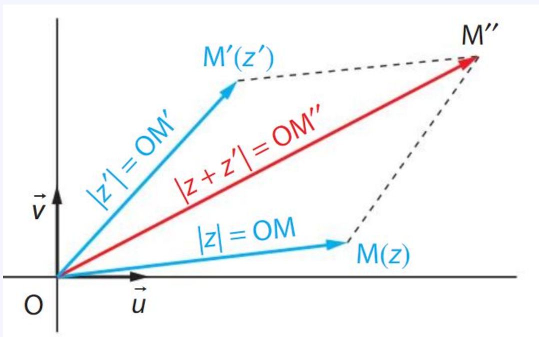
$$\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right) - \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(d-c\right) - \arg\left(b-a\right) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \quad (2\pi)$$

Théorème 3 (Inégalité triangulaire (Admis))

Soit z et z' deux complexes, on a :

$$|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$$

avec égalité si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = kz'$ ou $z' = kz$.



III.2 Alignement et orthogonalité

Propriété 11 (Colinéarité et orthogonalité)

Soit $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2.
Alors le complexe $\dfrac{z_1}{z_2}$ a pour argument toute mesure de l'angle $(\overrightarrow{u_1}\ ;\ \overrightarrow{u_2})$ et donc :

1. les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$;
2. les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\dfrac{z_1}{z_2} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.

Corollaire 1

Soit A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts et d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.
Le complexe $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ a pour argument toute mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)$ et donc :

1. les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$;
2. les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.

Méthode

1. Pour montrer qu'un complexe est un **réel** on peut chercher à établir que :
   - **1. a.** $z = \overline{z}$;
   - **1. b.** $\mathrm{Im}\,(z) = 0$;
   - **1. c.** si z est non nul, $\arg\,(z) = 0 \ \ (2\pi)$ ou $\arg\,(z) = \pi \ \ (2\pi)$.
2. Pour montrer qu'un complexe est un **imaginaire pur** on peut chercher à établir que :
   - **2. a.** $z = -\overline{z}$;
   - **2. b.** $\mathrm{Re}\,(z) = 0$;
   - **2. c.** si z est non nul, $\arg\,(z) = \dfrac{\pi}{2} \ \ (2\pi)$ ou $\arg\,(z) = -\dfrac{\pi}{2} \ \ (2\pi)$.
3. Il est souvent plus efficace de mettre z sous la forme $a + \mathrm{i}\,b$.

IV Compléments : racines $n-$ièmes de l'unité (Non Exigible)

IV.1 Définitions

Définition 4 (Racine carrée de z complexe)

1. On appelle racine carrée du complexe z tout complexe Z tel que $Z^2 = z$.
   Tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.
2. **ATTENTION** : il est impossible d'utiliser la notation $\sqrt{z}$ pour un complexe z quelconque.
   Il faut parler d'UNE racine carrée de z.

Définition 5

1. Si $z \in \mathbb{C}$; on appelle racine $n-$ième de z tout complexe $Z \in \mathbb{C}$ tel que $Z^n = z$.
2. Les racines $n-$ièmes de 1 sont encore appelées **racines $n-$ièmes de l'unité** .
3. L'ensemble des **racines $n-$ièmes de l'unité** est noté $\mathbb{U}_n$.

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \ , \ z^n = 1\}$$

IV.2 Propriétés

On peut montrer (à faire en exercice) que

Propriété 12

1. $\mathbb{U}_n$ est non vide.
2. Le produit de deux éléments de $\mathbb{U}_n$ est élément de $\mathbb{U}_n$.
3. L'inverse de deux éléments de $\mathbb{U}_n$ est élément de $\mathbb{U}_n$.
4. Il existe exactement n racines $n-$ièmes de l'unité, qui sont les complexes :

$$z_k = \mathrm{e}^{i\,\frac{2k\pi}{n}} = (z_1) \quad , \quad \text{avec} \quad k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$$

5. Si ξ (on prononce la lettre grecque « *xi* ») est une racine $n-$ième de l'unité, alors :

$$1 + \xi + \xi^2 + \cdots \xi^n = 0$$

6. La somme des racines $n-$ièmes de l'unité est égale à 0

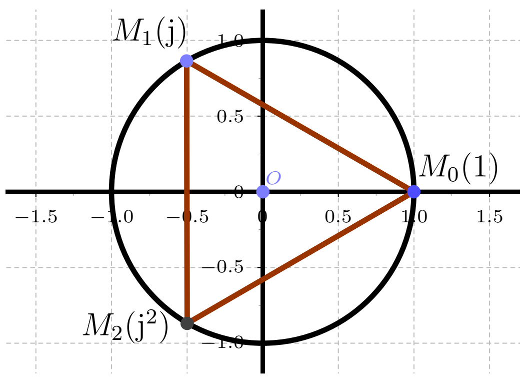
IV.3 Exemples

Les racines troisième de l'unité $\mathbb{U}_3 = \left\{z \in \mathbb{C} \ , \ z^3 = 1\right\}$ sont les complexes :

$$\mathbb{U}_3 = \left\{1 \ ; \ \mathrm{e}^{i\,\frac{2\pi}{3}} \ ; \ \mathrm{e}^{i\,\frac{-2\pi}{3}}\right\}$$

$$\mathbb{U}_3 = \left\{1 \ ; \ \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \ ; \ \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\} = \left\{1 \ ; \ \mathrm{j} \ ; \ \mathrm{j}^2\right\}$$

La première est habituellement notée j et la seconde, son conjugué, $\bar{\mathrm{j}}$ ou j^2 .



↫ **Fin du cours** ↬