Math93.com

Espace et produit scalaire

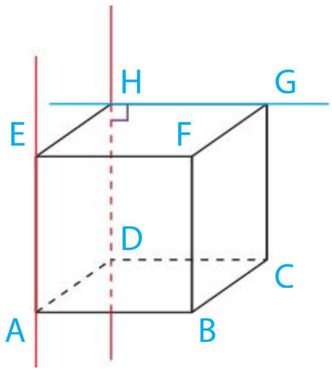
Terminale S

I Orthogonalité dans l'espace

I.1 Droites orthogonales. Vecteurs orthogonaux

Définition 1 (Droites orthogonales)

Deux droites sont **orthogonales** si et seulement si il existe deux droites perpendiculaires qui leur dont parallèles et qui sont perpendiculaires entre elles.



Exemple

Dans ce cube, les droites (HD) et (GH) sont perpendiculaires (sécante en H). Puisque (AE) est perpendiculaire) (HD), les droites (AE) et (GH) sont orthogonales.

Remarque

1. Attention, **des droites orthogonales, ne sont pas nécessairement sécantes** et donc pas nécessairement perpendiculaires.
2. Par contre, deux droites perpendiculaires sont sécantes et orthogonales.

Définition 2 (Vecteurs orthogonaux)

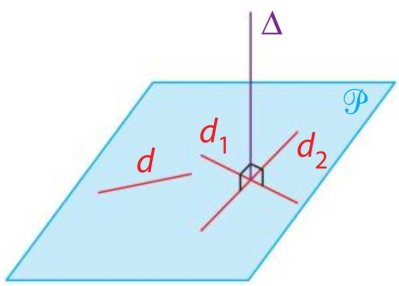
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ **et** $\overrightarrow{v}$ **sont orthogonaux** si et seulement si :

1. soit l'un (au moins) des deux est nul ;
2. soit ce sont des vecteurs directeurs (non nuls) de deux droites orthogonales.

I.2 Droite orthogonale à un plan

Définition 3 (Droite orthogonale à un plan)

Une droite Δ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) de ce plan.



Propriété 1

Si une droite Δ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$, elle est orthogonale à toute droite (d) de ce plan.

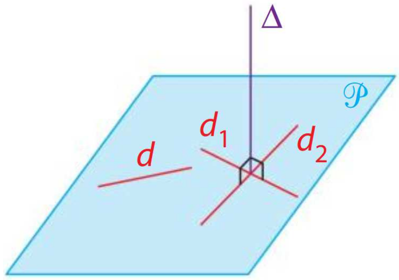
I.3 Remarques importantes

Remarques

1. Une droite de **vecteur $\vec{u}$ est orthogonale à un plan** de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonale à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$.
2. Par un point donné, il passe une et une seule droite orthogonale à un plan.
3. Par un point donné, il passe une et une seule plan orthogonal à une droite donnée.

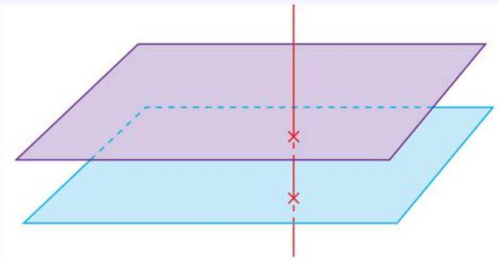
ATTENTION

Deux droites perpendiculaires à une même troisième ne sont pas nécessairement parallèles entre elles.
Par exemple ici (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires à Δ mais ne sont pas parallèles.

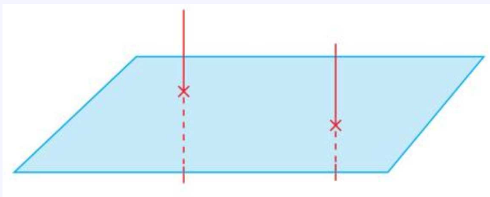


Propriété 2

Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles entre eux.



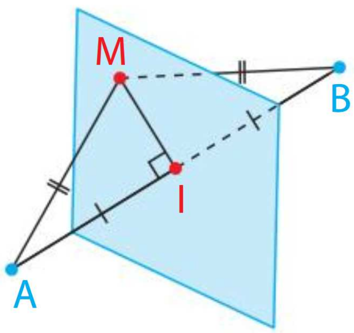
Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles entre elles.



I.4 Plan médiateur

Propriété 3 (Plan médiateur)

1. Le **plan médiateur d'un segment [AB]** est le plan orthogonal à la droite (AB) qui passe par le milieu du segment [AB].
2. Le **plan médiateur d'un segment [AB]** est aussi l'ensemble des points de l'espace équidistants des points A et B.



II Le produit scalaire dans l'espace

II.1 Définitions

Définition 4 (Produit scalaire)

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace et A, B, C trois points tels que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
Il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ contenant A, B, C.
On définit le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ comme étant le produit scalaire $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}$ dans le plan $\mathcal{P}$.

On retrouve donc toutes les expressions connues du produit scalaire. Dans tous ce qui suit, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de l'espace et A, B, C trois points tels que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

Propriété 4 (Produit scalaire)

Avec les **normes**

$$\boxed{\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2\right)}$$

Avec le **cosinus**

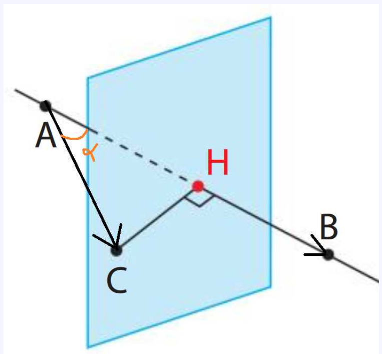
$$\boxed{\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\|.\left\|\overrightarrow{v}\right\|.\cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)}$$

ATTENTION. L'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ ne peut être défini qu'au signe près dans l'espace, mais cela ne change pas son cosinus (la fonction cosinus est paire).

Propriété 5 (Produit scalaire et projeté orthogonal)

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de l'espace et A, B, C trois points tels que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

1. **Projeté orthogonal**.
   Si A et B sont distincts, il existe un seul plan orthogonal à (AB) passant par C. Ce plan coupe (AB) en H qui est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
2. On a alors :
   $$\boxed{\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH}}$$
3. **Distance Point - Droite**.
   La distance CH est la **distance du point C à la droite (AB)**.
   C'est à dire la plus courte distance entre C et un point quelconque de la droite (AB).



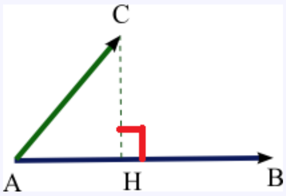
Définition 5

1. Deux vecteurs sont **orthogonaux** si et seulement si leur **produit scalaire est nul**.
2. Un **repère** $\left(\mathbf{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ **de l'espace est orthonormé** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont deux à deux orthogonaux et que $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = \left\|\overrightarrow{k}\right\| = 1$.

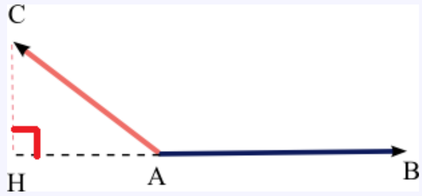
II.2 Rappel dans le plan

Propriété 6 (Produit scalaire dans le plan)

Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), le produit scalaire est alors en valeur absolue égal au produit des distances AH et AB.



$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH} = AB.\,AH$$



$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH} = -AB.\,AH$$

II.3 Propriétés

Propriété 7

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.

1. Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\boxed{\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ et $\boxed{\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = xx'+yy'+zz'}$

2. Si $A\,(x_A\ ;\ y_B\ ;\ z_C)$ et $B\,(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ alors

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$$

Propriété 8 (Définition "comme en Post-Bac")

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel. Le produit scalaire est (une forme) :

1. **Symétrique** : $\boxed{\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\,.\,\overrightarrow{u}}$

2. **Bilinéaire**.

   2. a. Linéarité par rapport à la première variable :

   $$\boxed{\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}\,.\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\,.\overrightarrow{w}} \quad \text{et} \quad \boxed{\left(k\,\overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v} = k\times\left(\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}\right)}.$$

   2. b. Linéarité par rapport à la deuxième variable (on l'obtient par symétrie) :

   $$\boxed{\overrightarrow{u}\,.\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{u}\,.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\,.\overrightarrow{w}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{u}\,.\left(k\,\overrightarrow{v}\right) = k\times\left(\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}\right)}.$$

3. **Positive** : $\boxed{\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u} \geqslant 0}$.

4. **Définie positive** : positive et telle que

$$\boxed{\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}}$$

On dira dans le supérieur que le produit scalaire est une forme **bilinéaire symétrique** et **définie positive** .

Propriété 9 (Identités remarquables)

1. $\boxed{\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right).\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)=\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2}$.
2. $\boxed{\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right).\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)=\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)^2=\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2+2\times\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2}$.
3. $\boxed{\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right).\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)=\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)^2=\left\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2-2\times\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2}$.

Remarque

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$ se note aussi $\overrightarrow{u}^2$ c'est le **carré scalaire** de $\overrightarrow{u}$.

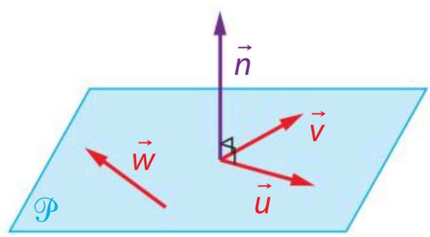
$$\boxed{\overrightarrow{u}^2=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}=\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2}$$

III Vecteur normal à un plan

III.1 Définition

Définition 6

Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal à un plan $(\mathscr{P})$ si et seulement si il est non nul et orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $(\mathscr{P})$.



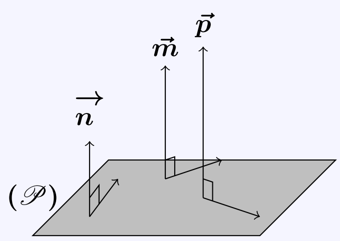
III.2 Propriétés

Propriété 10

Un vecteur normal à un plan est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan.

Propriété 11

Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à un plan $(\mathscr{P})$.
Tous les vecteurs normaux à un plan sont colinéaires entre eux.



Preuve

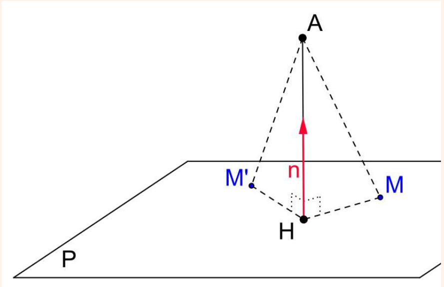
Soit $\vec{m}$ un vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$, c'est-à-dire tel que $\vec{m} = k\vec{n}$, $k \in \mathbb{R}^*$. Montrons que $\vec{m}$ est orthogonal à tout vecteur de $(\mathscr{P})$.
Soit $\vec{w}$ un vecteur de $(\mathscr{P})$. Alors :

$$\vec{w} \cdot \vec{m} = \vec{w} \cdot (k\vec{n}) = k(\vec{w} \cdot \vec{n}) = 0$$

Remarque

Distance Point - Plan
La projection orthogonale d'un point A sur un plan $(\mathscr{P})$ est le point H appartenant à $(\mathscr{P})$ tel que (AH) soit orthogonale à $(\mathscr{P})$ ou, autrement dit, que $\overrightarrow{AH}$ soit un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

AH est la **distance entre le point A et le plan** $(\mathscr{P})$ c'est à dire la plus courte distance entre le point A et un point quelconque du plan $(\mathscr{P})$.



III.3 Lien avec les droites

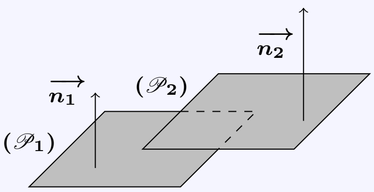
Propriété 12

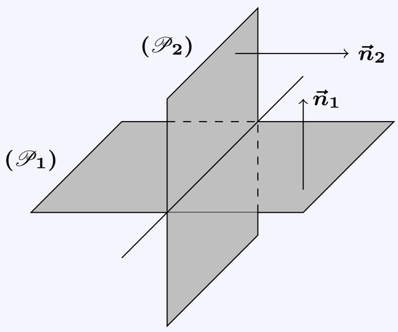
1. Une **droite est orthogonale à un plan** si et seulement si un de ses vecteurs directeurs est un vecteur normal du plan.
2. Un vecteur normal à un plan est un vecteur directeur de toutes les droites orthogonales au plan.

III.4 Plans parallèles et perpendiculaires

Propriété 13 (Parallélisme et perpendicularité de plans)

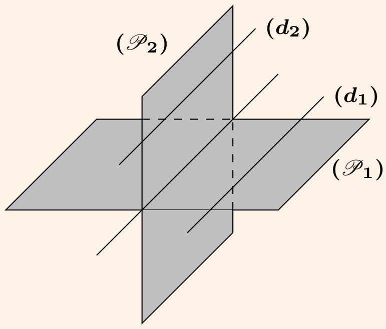
- **Deux plans sont parallèles** si et seulement un vecteur normal de l'un est colinéaire à un vecteur normal de l'autre.
- **Deux plans sont perpendiculaires** si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.





Attention

Soit $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$, deux plans perpendiculaires.
Si (d_1) est une droite de $(\mathscr{P}_1)$ et (d_2) est une droite de $(\mathscr{P}_2)$, alors (d_1) et (d_2) ne sont pas nécessairement orthogonales.
Ci-contre, deux droites (d_1) et (d_2) parallèles.

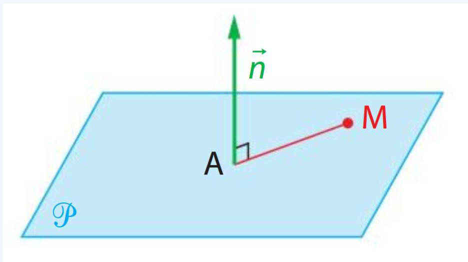


IV Équation cartésienne d'un plan

Propriété 14

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul, A un point et $(\mathcal{P})$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
Alors un point M appartient à $(\mathscr{P})$ si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$.

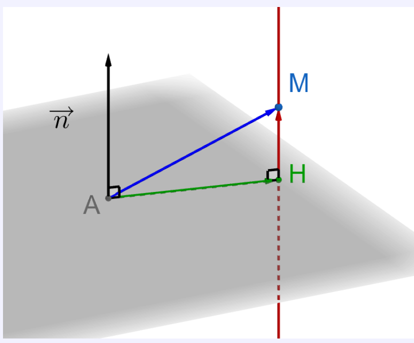
$$\boxed{M \in (\mathcal{P}) \iff \vec{n} \cdot \vec{AM} = 0}$$



Preuve

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul, A un point et $(\mathscr{P})$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

- Si M appartient à $(\mathscr{P})$ alors $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur de $(\mathscr{P})$ or $\vec{n}$ est normal à $(\mathscr{P})$, donc à tous les vecteurs de $(\mathscr{P})$. A fortiori, $\vec{n}$ est normal à $\overrightarrow{AM}$ et donc par définition, le produit scalaire $\vec{n} \cdot \vec{AM}$ est nul (définition 5 page 3).
- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$.
  Considérons H le projeté orthogonal de M sur $(\mathscr{P})$.



Alors
$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{n} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} + \vec{n} \cdot \overrightarrow{HM}$$

D'une part, $\overrightarrow{AH}$ est contenu dans $(\mathscr{P})$, donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux et ainsi $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.

D'autre part, $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et donc

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{HM} = \begin{cases} \|\vec{n}\| \times HM \\ \text{ou} \\ -\|\vec{n}\| \times HM \end{cases}$$

On en déduit donc que

$$\|\vec{n}\| \times HM = 0$$

et ainsi, puisque $\vec{n} \neq \vec{0}$, $HM = 0$: le point M est confondu avec le point H, il appartient donc à $(\mathscr{P})$.

On en déduit que :

Propriété 15

Dans un repère orthonormé de l'espace, soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace.
L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\ .\ \overrightarrow{n} = 0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

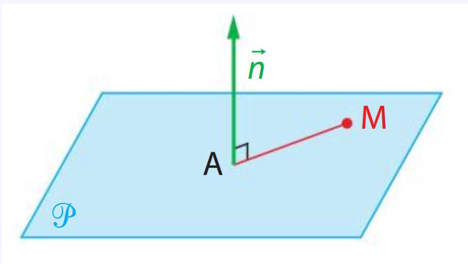
$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} .\ \overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a\,(x-x_A)+b\,(y-y_A)+c\,(z-z_A)=0$$

Et donc

Propriété 16 (Équation cartésienne d'un plan)

Dans un repère orthonormé de l'espace :

1. l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que : $ax+by+cz+d=0$, avec $(a\ ,\ b\ ,\ c) \neq (0\ ,\ 0\ ,\ 0)$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$;
2. tout plan admet une équation (dite **cartésienne**) de la forme $ax+by+cz+d=0$, avec $(a\ ,\ b\ ,\ c) \neq (0\ ,\ 0\ ,\ 0)$.



Preuve

Dans un repère orthonormé de l'espace.

1.
   - Puisque $(a\ ,\ b\ ,\ c) \neq (0\ ,\ 0\ ,\ 0)$, il existe $A\,(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ tel que : $ax_A+by_A+cz_A+d=0$ et donc :
   $$d = -ax_A - by_A - cz_A$$
   - Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tel que $ax+by+cz+d=0$, on a alors :
   $$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ ax_A+by_A+cz_A+d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a\,(x-x_A)+b\,(y-y_A)+c\,(z-z_A)=0 \\ d=-ax_A-by_A-cz_A \end{cases}$$

- En posant $A\,(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$, $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ on a alors :

$$\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\ax_A+by_A+cz_A+d=0\end{cases}\iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}.\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

D'après la propriété 14 page 7, on en déduit que l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que : $ax+by+cz+d=0$, avec $(a\ ,\ b\ ,\ c)\neq(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

2.

- Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le point $A\,(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

D'après la propriété 14 page 7, on a :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in\mathcal{P}\iff \vec{n}\cdot\vec{AM}=0\iff a\,(x-x_A)+b\,(y-y_A)+c\,(z-z_A)=0$$

Et donc en posant $d=-ax_A-by_A-cz_A$ on a :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in\mathcal{P}\iff\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\d=-ax_A-by_A-cz_A\end{cases}$$

Fin du cours