Math93.com

Fonctions sinus et cosinus

Terminale S

ROC
Les **ROC, (Restitution Organisée de Connaissances)**, sont les démonstrations du cours à connaître indiquées explicitement dans le nouveau programme de terminale S entré en vigueur à la rentrée 2012. Ce chapitre ne compte pas de ROC.

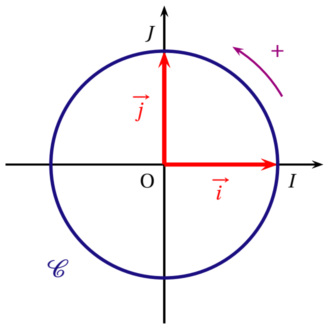
I Définition et rappels

I.1 Repérage sur un cercle

I.1.1 Cercle trigonométrique

Définition 1 (Cercle trigonométrique)

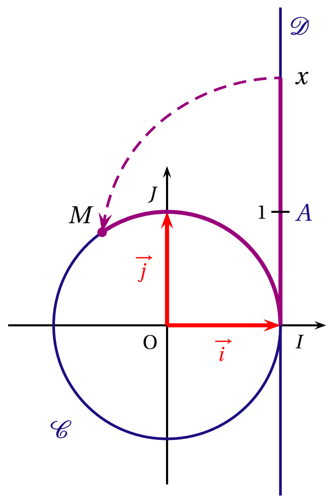
Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$
Le **cercle trigonométrique** est le cercle $\mathscr{C}$ de centre O, de rayon 1 orienté dans le sens direct.



I.1.2 Enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$
La droite $\mathscr{D}$ est tangente en I au cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.
A est le point de coordonnées $(1;1)$. La droite $\mathscr{D}$ est munie du repère $(I;A)$.
Par enroulement de la droite réelle $\mathscr{D}$ sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$:

- à tout point de la droite d'abscisse x on peut associer un unique point M du cercle trigonométrique, image du réel x;
- tout point M du cercle trigonométrique est l'image d'une infinité de réels. Si le point M est associé à un réel x, alors il est associé à tout réel de la forme $x + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

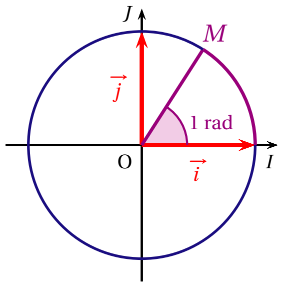


I.1.3 Mesure d'un angle en radian

Définition 2

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O, de rayon 1.

1. **Un radian** est la mesure d'un angle au centre qui intercepte le cercle $\mathscr{C}$ suivant **un arc de longueur 1**.
2. La **mesure principale d'un angle orienté** est comprise dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

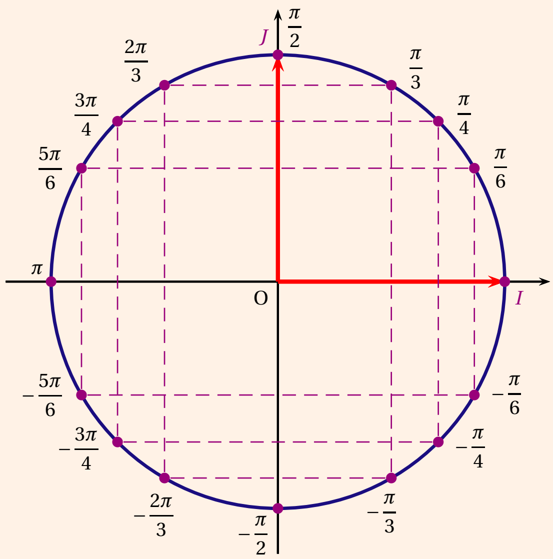


Remarque

Les mesures en radians et en degrés d'un angle géométrique sont proportionnelles :

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°
x en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π

Valeurs remarquables



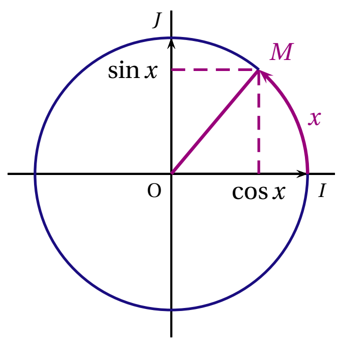
I.2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

I.2.1 Définition

Propriété 1

Soit M le point du cercle trigonométrique associé à un réel x.

- Le cosinus du réel x, noté $\cos x$, est l'abscisse du point M.
- Le sinus du réel x, noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M.



I.2.2 Propriétés

Propriété 2

1. Pour tout réel x et pour tout entier relatif k,

$$\boxed{\cos(x+k\times 2\pi)=\cos x} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(x+k\times 2\pi)=\sin x}$$

2. Pour tout réel x,

$$\boxed{-1\leqslant \cos x\leqslant 1} \quad \text{et} \quad \boxed{-1\leqslant \sin x\leqslant 1}$$

3. Pour tout réel x,

$$\boxed{\cos^2 x+\sin^2 x=1}$$

Exemple

Sachant que $\sin x=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ avec $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$, déterminer la valeur exacte de $\cos x$. Pour tout réel x, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ donc $\cos^2 x+\dfrac{5}{9}=1$, soit $\cos^2 x=\dfrac{4}{9}$.
Il existe deux valeurs possibles du cosinus :

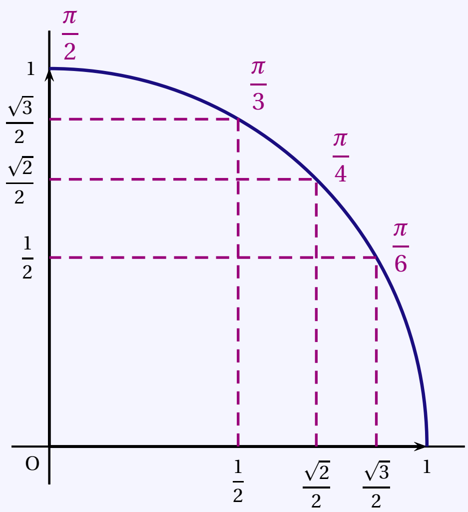
$$\cos x=-\frac{2}{3} \qquad \text{ou} \qquad \cos x=\frac{2}{3}$$

Comme $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$, alors $\cos x>0$ donc $\cos x=\dfrac{2}{3}$.

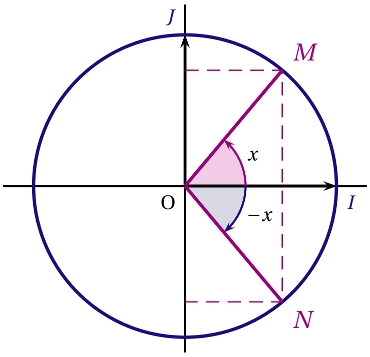
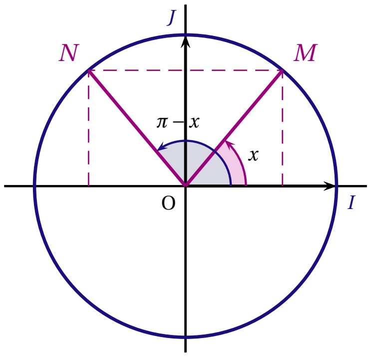
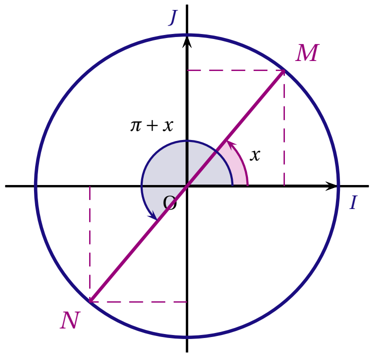
I.2.3 Valeurs remarquables

Propriété 3 (Valeurs remarquables)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



I.2.4 Angles associés

Parité : pour tout réel x :	Pour tout réel x :	Pour tout réel x :
$\boxed{\begin{array}{c}\cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x\end{array}}$	$\boxed{\begin{array}{c}\cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x\end{array}}$	$\boxed{\begin{array}{c}\cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x\end{array}}$
		
M et N sont symétriques par rapport à (OI)	M et N sont symétriques par rapport à (OJ)	M et N sont symétriques par rapport à O

Exemple

1. $\cos\dfrac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

2. $\sin\dfrac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

I.2.5 Formules de trigonométrie : Mémo SI-CO-CO-SI / CO-CO-SI-SI

Propriété 4

Pour tous les réels a et b on a :

1. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
2. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
3. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
4. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

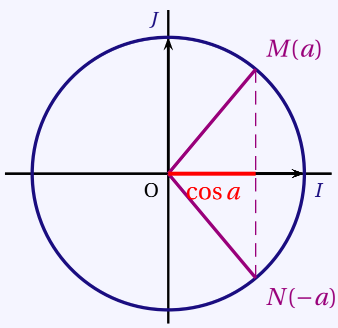
Mnémotechnique pour (1) et (2) : SI-CO-CO-SI / CO-CO-SI-SI / Priorité sinus et addition / (-1) dernière

I.2.6 Équations

Propriété 5 (Équation $\cos x = \cos a$)

Soit a un réel donné. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = \cos a$ sont pour k est un entier relatif. :

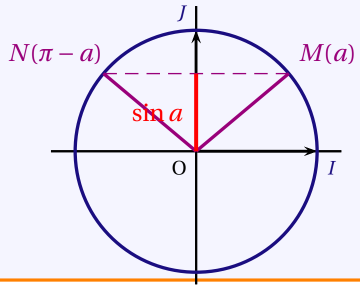
$$\cos x = \cos a \iff \begin{cases} x & = a + 2k\pi \\ x & = -a + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$



Propriété 6 (Équation $\sin x = \sin a$)

Soit a un réel donné. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = \sin a$ sont pour k est un entier relatif :

$$\sin x = \sin a \iff \begin{cases} x &= a + 2k\pi \\ x &= \pi - a + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$



II Définition et dérivabilité

II.1 Définition

On se place dans tout le chapitre dans un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Définition 3

1. La **fonction sinus**, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\sin : x \longmapsto \sin x$.
2. La **fonction cosinus**, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\cos : x \longmapsto \cos x$.

II.2 Dérivabilité

Propriété 7 (Dérivabilité en 0 (Admis))

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables en 0 et on a :

$$\boxed{\cos'(0) = 0} \text{ et } \boxed{\sin'(0) = 1}$$

Propriété 8 (Dérivabilité (preuve à connaître))

Les fonctions sinus et cosinus sont **dérivables sur** $\mathbb{R}$, et pour tout réel x on a :

$$\boxed{\cos'(x) = -\sin(x)} \text{ et } \boxed{\sin'(x) = \cos(x)}$$

Remarque : puisque les fonctions sont dérivables, elles sont continues sur $\mathbb{R}$.

Propriété 9 (Dérivabilité (preuve à connaître))

- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = a\cos(ax+b)$$

- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$g'(x) = -a\sin(ax+b)$$

- Plus généralement, si u est dérivable sur $\mathbb{R}$ on a :

$$(\sin u)' = \cos u \times u' \quad \text{et} \quad (\cos u)' = -\sin u \times u'$$

Démonstration(à connaître) de la propriété 8

1. Soit x un nombre réel et h un nombre réel non nul. On a en appliquant les formules de trigonométrie de la propriété I.2.5 :

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}\\ &= \frac{\cos x\left(\cos h-1\right)-\sin x\sin h}{h}\\ &= \cos x\times\frac{(\cos h-1)}{h}-\sin x\times\frac{\sin h}{h}\\ &= \cos x\times\frac{(\cos h-\cos 0)}{h}-\sin x\times\frac{\sin h-\sin 0}{h}\end{aligned}$$

Or, cosinus et sinus sont dérivables en 0 de dérivées respectives 0 et 1 donc

$$\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(\cos h-\cos 0)}{h}=\cos' 0=0\\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h-\sin 0}{h}=\sin' 0=1\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \cos x\times\left(\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-\cos 0)}{h}\right)-\sin x\times\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h-\sin 0}{h}\right)\\ &= \cos x\times 0-\sin x\times 1\\ \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \underline{-\sin x=\cos'(x)}\end{aligned}$$

2. Soit x un nombre réel et h un nombre réel non nul. On a en appliquant les formules de trigonométrie de la propriété I.2.5 :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\ &= \frac{\sin x\left(\cos h-1\right)+\cos x\sin h}{h}\\ &= \sin x\times\frac{(\cos h-1)}{h}+\cos x\times\frac{\sin h}{h}\\ &= \sin x\times\frac{(\cos h-\cos 0)}{h}+\cos x\times\frac{\sin h-\sin 0}{h}\end{aligned}$$

Or, cosinus et sinus sont dérivables en 0 de dérivées respectives 0 et 1 donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-\cos 0)}{h}=\cos' 0=0 \quad\text{et}\quad \lim_{h\to 0}\frac{\sin h-\sin 0}{h}=\sin' 0=1$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\ \sin x\times\left(\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-\cos 0)}{h}\right)+\cos x\times\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h-\sin 0}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\ \sin x\times 0+\cos x\times 1\\ &= \underline{\cos x=\sin' x}\end{aligned}$$

Exemple

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos\left(\dfrac{2x+1}{3}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est de la forme $f(x)=\cos(ax+b)$, donc de dérivée $f(x)=-a\sin(ax+b)$. Pour tout réel x on a :

$$f'(x)=-\frac{2}{3}\sin\left(\frac{2x+1}{3}\right)$$

II.3 Application : Limite de $\dfrac{\sin x}{x}$

Propriété 10 (Limite de $\dfrac{\sin x}{x}$)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Démonstration(à connaître)

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc d'après la propriété 8 on a :

$$\sin'(x) = \cos(x) \Longrightarrow \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

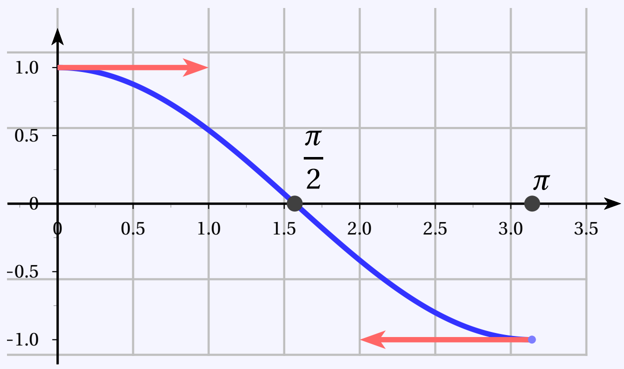
Or

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

III Les fonctions sinus et cosinus sur $[0\,;\,\pi]$

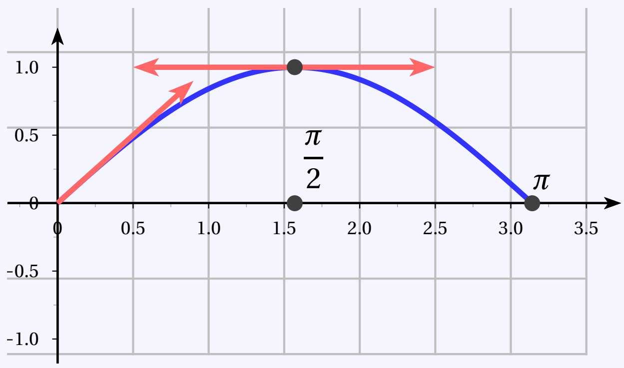
Propriété 11 (Variation de la fonction cosinus)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Signe de $\cos' x = \sin x$	0		$-$		0
Variations de $x \longmapsto \cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1



Propriété 12 (Variation de la fonction sinus)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Signe de $\sin' x = \cos x$		$+$	0	$-$	
Variations de $x \longmapsto \sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



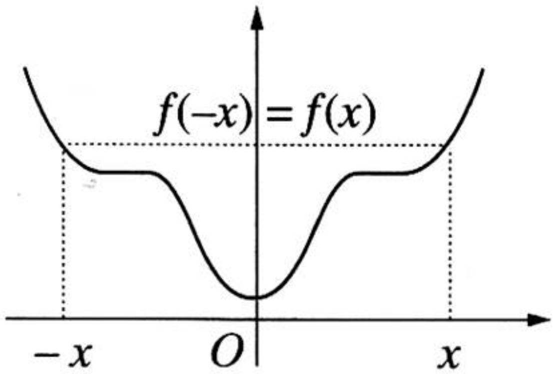
La tangente à la courbe en O est d'équation $y = x$.

IV Les fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$, parité et périodicité

IV.1 Parité : définitions générales

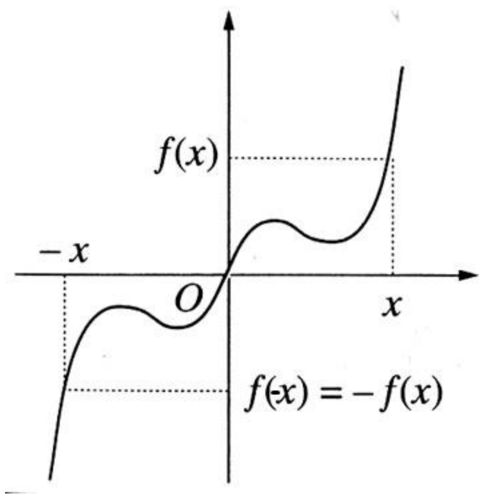
Définition 4 (Fonctions paires)

1. **Définition** :
   Un fonction f définie sur I est **paire** si :
   - Pour tout réel x et I, alors $(-x) \in I$;
   - et $f(-x) = f(x)$
2. **Propriété** :
   Si on se place dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.



Définition 5 (Fonctions impaires)

1. **Définition** :
   Un fonction f définie sur I est **impaire** si :
   - Pour tout réel x et I, alors $(-x) \in I$;
   - et $f(-x) = -f(x)$
2. **Propriété** :
   Si on se place dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative d'une fonction impaire est **symétrique par rapport à l'origine O**.



IV.2 Parité des fonctions sinus et cosinus

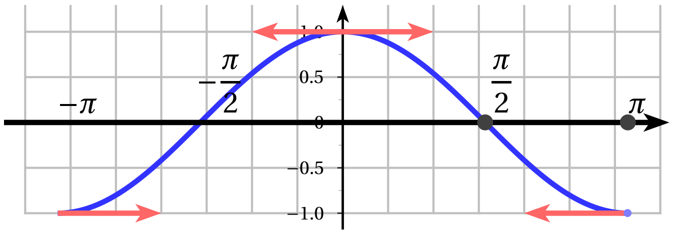
IV.2.1 Propriété

Propriété 13

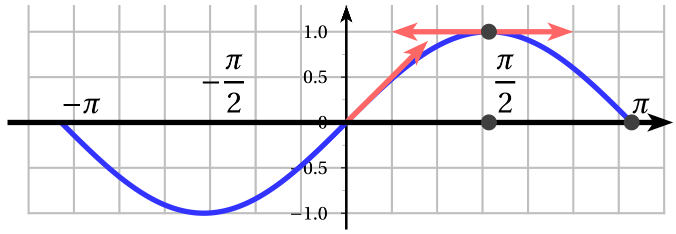
1. La fonction **cosinus est paire**.
   Donc dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
2. La fonction **sinus est impaire**.
   Donc dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'origine O**.

IV.2.2 Conséquence : Courbes représentatives sur $[-\pi\,;\,\pi]$

Fonction cosinus



Fonction sinus



IV.3 Périodicité des fonctions sinus et cosinus

Propriété 14 (Périodicité)

Pour tout réel x on a :

- $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$
- $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$

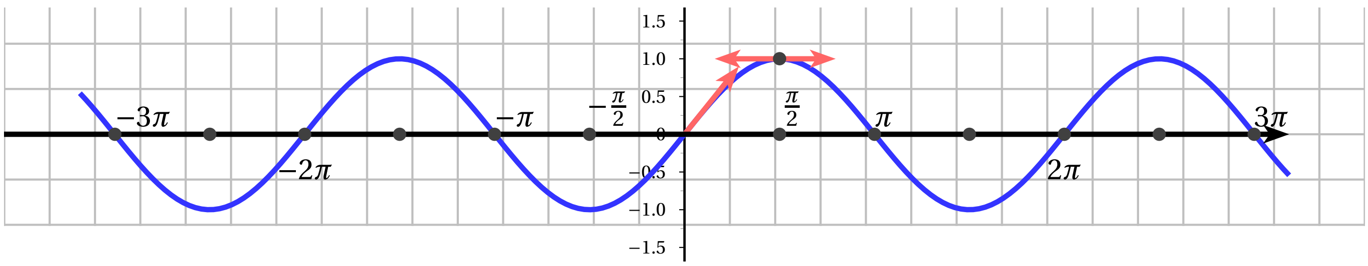
On dit que les fonction sinus et cosinus sont **périodiques de période $T = 2\pi$**.

Propriété 15 (Conséquence)

On se place dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$.
Les fonction sinus et cosinus sont **périodiques de période $T = 2\pi$** donc il y a invariance des courbes représentatives par translation de vecteur $2\pi\,\vec{\imath}$.

Pour faire simple, pour les courbes il y répétition du même motif « tous les 2π ».

Fonction sinus



Fonction cosinus