



ROC

Les **ROC**, (**R**estitution **O**rganisée de **C**onnaissances), sont les démonstrations du cours à connaître indiquées explicitement dans le nouveau programme de terminale S entré en vigueur à la rentrée 2012. Ce chapitre ne compte pas de ROC.

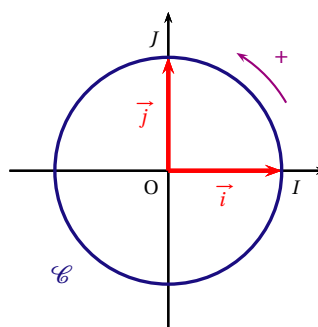
I Définition et rappels

I.1 Repérage sur un cercle

I.1.1 Cercle trigonométrique

Définition 1 (Cercle trigonométrique)

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j})
Le **cercle trigonométrique** est le cercle \mathcal{C} de centre O , de rayon 1 orienté dans le sens direct.



I.1.2 Enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique

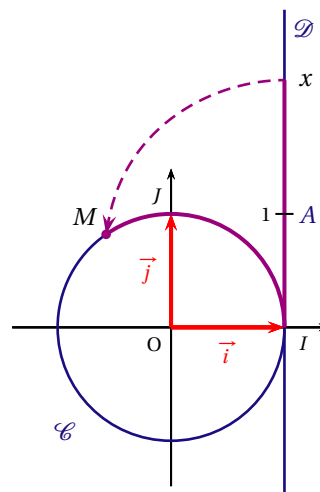
Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j})

La droite \mathcal{D} est tangente en I au cercle trigonométrique \mathcal{C} .

A est le point de coordonnées $(1; 1)$. La droite \mathcal{D} est munie du repère $(I; A)$.

Par enroulement de la droite réelle \mathcal{D} sur le cercle trigonométrique \mathcal{C} :

- à tout point de la droite d'abscisse x on peut associer un unique point M du cercle trigonométrique, image du réel x ;
- tout point M du cercle trigonométrique est l'image d'une infinité de réels. Si le point M est associé à un réel x , alors il est associé à tout réel de la forme $x + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

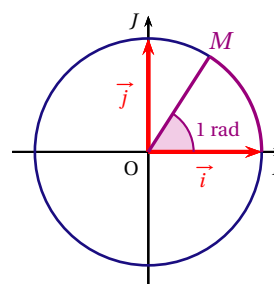


I.1.3 Mesure d'un angle en radian

Définition 2

Soit \mathcal{C} le cercle trigonométrique de centre O , de rayon 1.

1. Un **radian** est la mesure d'un angle au centre qui intercepte le cercle \mathcal{C} suivant un **arc de longueur 1**.
2. La **mesure principale d'un angle orienté** est comprise dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.



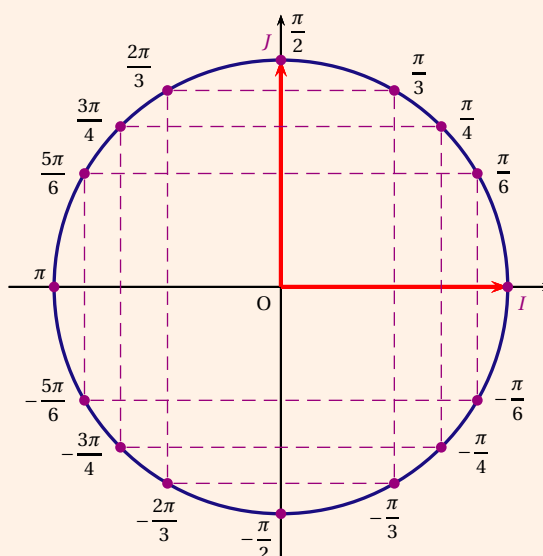
Remarque

Les mesures en radians et en degrés d'un angle géométrique sont proportionnelles :

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°
x en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π



Valeurs remarquables



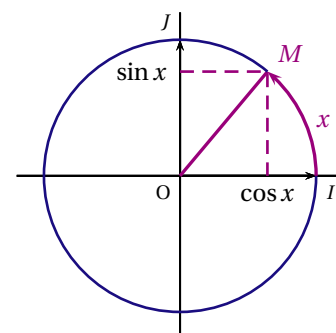
I.2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

I.2.1 Définition

Propriété 1

Soit M le point du cercle trigonométrique associé à un réel x .

- Le cosinus du réel x , noté $\cos x$, est l'abscisse du point M .
- Le sinus du réel x , noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M .



I.2.2 Propriétés

Propriété 2

1. Pour tout réel x et pour tout entier relatif k ,

$$\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + k \times 2\pi) = \sin x$$

2. Pour tout réel x ,

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$$

3. Pour tout réel x ,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$



Exemple

Sachant que $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ avec $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, déterminer la valeur exacte de $\cos x$. Pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

donc $\cos^2 x + \frac{5}{9} = 1$, soit $\cos^2 x = \frac{4}{9}$.

Il existe deux valeurs possibles du cosinus :

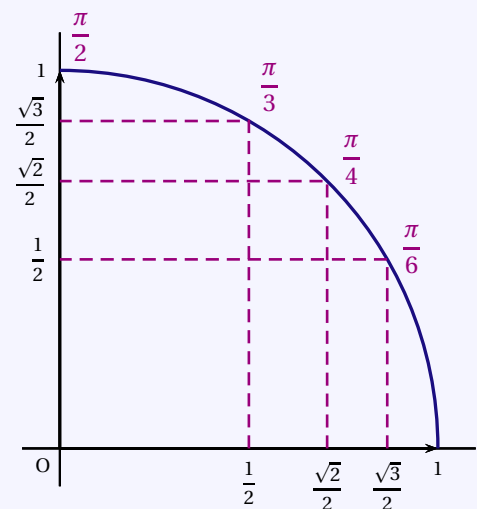
$$\cos x = -\frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \cos x = \frac{2}{3}$$

Comme $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, alors $\cos x > 0$ donc $\cos x = \frac{2}{3}$.

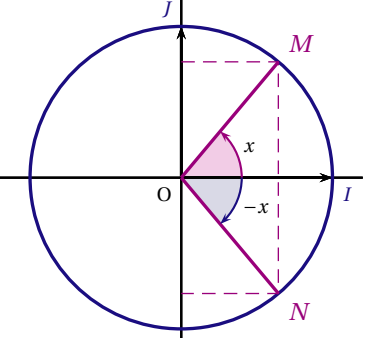
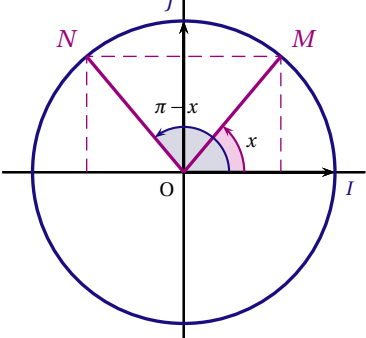
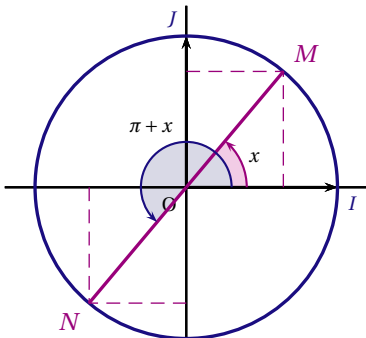
I.2.3 Valeurs remarquables

Propriété 3 (Valeurs remarquables)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



I.2.4 Angles associés

<p>Parité : pour tout réel x :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$ </div>  <p>M et N sont symétriques par rapport à (OI)</p>	<p>Pour tout réel x :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$ </div>  <p>M et N sont symétriques par rapport à (OI)</p>	<p>Pour tout réel x :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ </div>  <p>M et N sont symétriques par rapport à O</p>
---	---	---



Exemple

<p>1. $\cos \frac{4\pi}{3} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$</p>	<p>2. $\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$</p>
---	--

I.2.5 Formules de trigonométrie : Mémo SI-CO-CO-SI / CO-CO-SI-SI

Propriété 4

Pour tous les réels a et b on a :

- | | |
|---|---|
| <p>1. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$</p> <p>2. $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$</p> | <p>3. $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$</p> <p>4. $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$</p> |
|---|---|

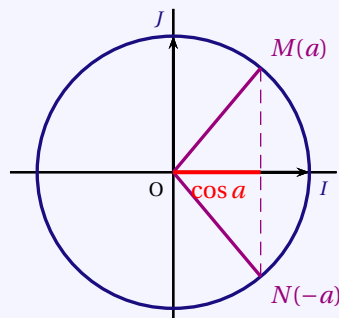
Mnémotechnique pour (1) et (2) : SI-CO-CO-SI / CO-CO-SI-SI / Priorité sinus et addition / (-1) dernière

I.2.6 Équations

Propriété 5 (Équation $\cos x = \cos a$)

Soit a un réel donné. Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $\cos x = \cos a$ sont pour k est un entier relatif :

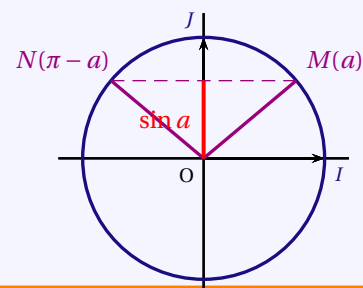
$$\cos x = \cos a \iff \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



Propriété 6 (Équation $\sin x = \sin a$)

Soit a un réel donné. Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $\sin x = \sin a$ sont pour k est un entier relatif :

$$\sin x = \sin a \iff \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$



II Définition et dérivabilité

II.1 Définition

On se place dans tout le chapitre dans un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Définition 3

1. La **fonction sinus**, est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\sin : x \mapsto \sin x$.
2. La **fonction cosinus**, est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\cos : x \mapsto \cos x$.

II.2 Dérivabilité

Propriété 7 (Dérivabilité en 0 (Admis))

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables en 0 et on a :

$$\boxed{\cos'(0) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin'(0) = 1}$$

Propriété 8 (Dérivabilité (preuve à connaître))

Les fonctions sinus et cosinus sont **dérivables sur** \mathbb{R} , et pour tout réel x on a :

$$\boxed{\cos'(x) = -\sin(x)} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin'(x) = \cos(x)}$$

Remarque : puisque les fonctions sont dérivables, elles sont continues sur \mathbb{R} .

Propriété 9 (Dérivabilité (preuve à connaître))

- La fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin(ax + b)$ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x :

$$f'(x) = a \cos(ax + b)$$

- La fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \cos(ax + b)$ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x :

$$g'(x) = -a \sin(ax + b)$$

- Plus généralement, si u est dérivable sur \mathbb{R} on a :

$$(\sin u)' = \cos u \times u' \quad \text{et} \quad (\cos u)' = -\sin u \times u'$$



Démonstration(à connaître) de la propriété 8



Exemple

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos\left(\frac{2x+1}{3}\right)$ est dérivable sur \mathbb{R} . Elle est de la forme $f(x) = \cos(ax + b)$, donc de dérivée $f'(x) = -a \sin(ax + b)$. Pour tout réel x on a :

$$f'(x) = -\frac{2}{3} \sin\left(\frac{2x+1}{3}\right)$$

II.3 Application : Limite de $\frac{\sin x}{x}$

Propriété 10 (Limite de $\frac{\sin x}{x}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

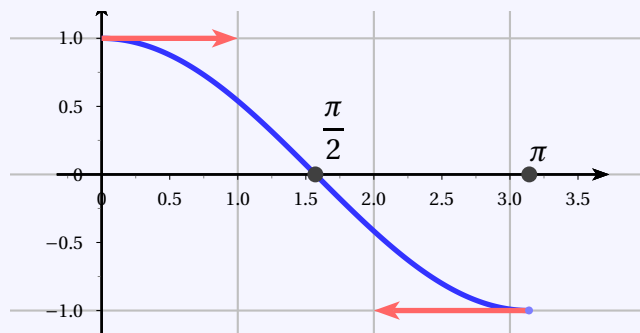


Démonstration(à connaître)

III Les fonctions sinus et cosinus sur $[0 ; \pi]$

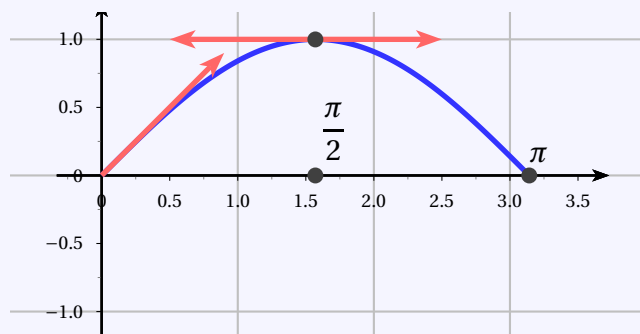
Propriété 11 (Variation de la fonction cosinus)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\cos' x = \sin x$	0	-	0
Variations de $x \mapsto \cos x$	1	0	-1



Propriété 12 (Variation de la fonction sinus)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\sin' x = \cos x$		+	-
Variations de $x \mapsto \sin x$	0	1	0



La tangente à la courbe en O est d'équation $y = x$.

IV Les fonctions sinus et cosinus sur \mathbb{R} , parité et périodicité

IV.1 Parité : définitions générales

Définition 4 (Fonctions paires)

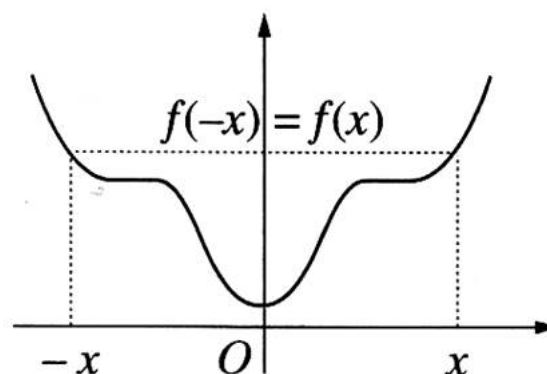
1. Définition :

Une fonction f définie sur I est **paire** si :

- Pour tout réel x et I , alors $(-x) \in I$;
- et $f(-x) = f(x)$

2. Propriété :

Si on se place dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe représentative d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.



Définition 5 (Fonctions impaires)

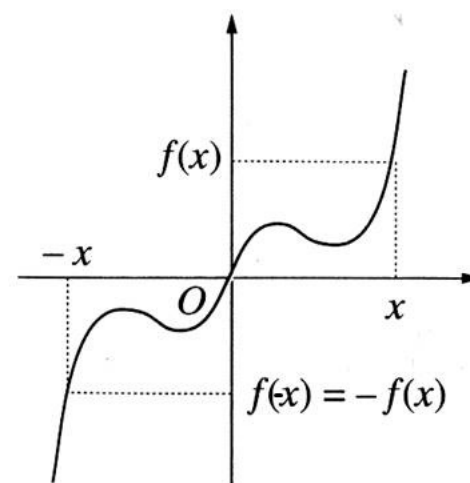
1. Définition :

Une fonction f définie sur I est **impaire** si :

- Pour tout réel x et I , alors $(-x) \in I$;
- et $f(-x) = -f(x)$

2. Propriété :

Si on se place dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe représentative d'une fonction impaire est **symétrique par rapport à l'origine O**.



IV.2 Parité des fonctions sinus et cosinus

IV.2.1 Propriété

Propriété 13

1. La fonction **cosinus** est **paire**.

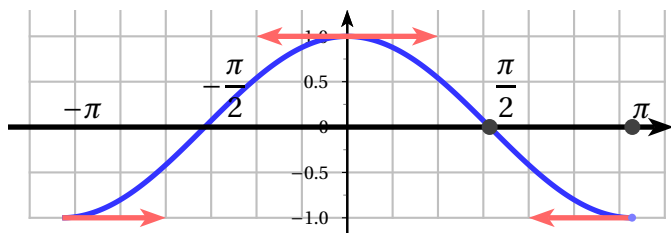
Donc dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

2. La fonction **sinus** est **impaire**.

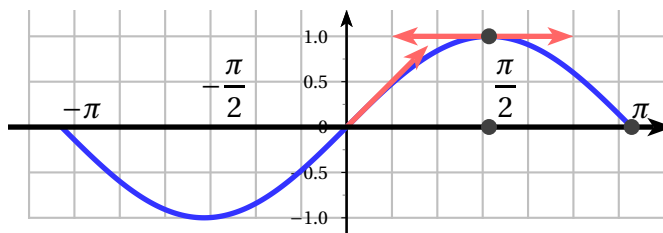
Donc dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'origine O**.

IV.2.2 Conséquence : Courbes représentatives sur $[-\pi ; \pi]$

Fonction cosinus



Fonction sinus



IV.3 Périodicité des fonctions sinus et cosinus

Propriété 14 (Périodicité)

Pour tout réel x on a :

- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

On dit que les fonction sinus et cosinus sont **périodiques de période $T = 2\pi$** .

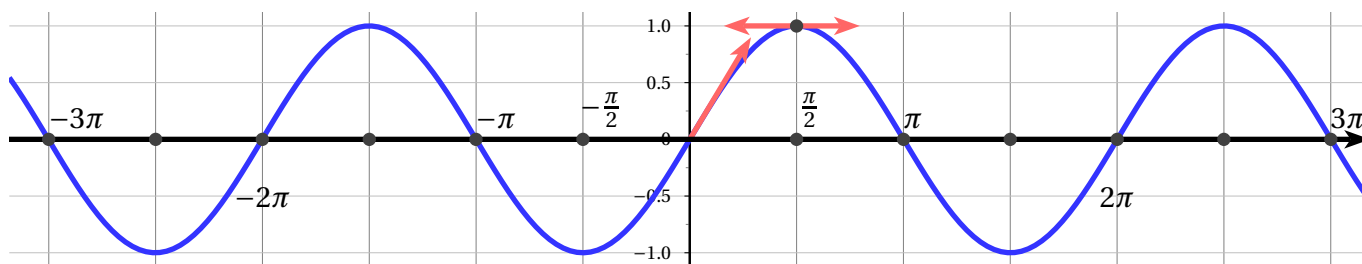
Propriété 15 (Conséquence)

On se place dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Les fonction sinus et cosinus sont **périodiques de période $T = 2\pi$** donc il y a invariance des courbes représentatives par translation de vecteur $2\pi \vec{i}$.

Pour faire simple, pour les courbes il y répétition du même motif « tous les 2π ».

Fonction sinus



Fonction cosinus

