



ROC

Les **ROC**, (**R**estitution **O**rganisée de **C**onnaissances), sont les démonstrations du cours à connaître indiquées explicitement dans le nouveau programme de terminale S entré en vigueur à la rentrée 2012.

Ce chapitre compte 3 ROC

I Des lois continues et fonctions de densité

I.1 Variable aléatoire continue

Une variable aléatoire pouvant prendre toute valeur d'un intervalle I de \mathbb{R} est dite **continue**.

I.2 Fonction de densité

Définition 1 (Fonction à densité)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On appelle **fonction de densité de probabilité sur I** toute fonction f définie, continue et positive sur I telle que l'intégrale de f sur I soit égale à 1.

$$f \text{ fonction densité sur } I \iff \begin{cases} 1. f \text{ définie sur } I \\ 2. f \text{ continue sur } I \\ 3. f \text{ positive sur } I \\ 4. \int_I f = 1 \end{cases}$$

I.3 Loi de probabilité

Définition 2 (Loi de probabilité de densité f)

Soit f une fonction de densité de probabilité sur un intervalle I .

On dit que la variable aléatoire X suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle I lorsque, pour tout intervalle $[a; b]$ inclus dans I , la probabilité de l'événement $X \in [a; b]$ est :

$$P(X \in [a; b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt$$

I.3.1 Propriétés

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f sur un intervalle I . Pour tous réels a et b appartenant à I .

Propriété 1

1. $P(X = a) = \int_a^a f(t) dt = 0$
2. $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$
3. $P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$

I.4 Espérance mathématique

La formule de l'espérance d'une variable aléatoire discrète est :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

On l'adapte au cas d'une variable aléatoire continue.

Définition 3 (Espérance Mathématiques)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle $[a; b]$, alors l'espérance mathématique de X est le réel

$$E(X) = \int_a^b t \times f(t) dt$$

II Loi uniforme



Remarque

Contexte général d'application de la loi uniforme : Un instant d'arrivée au hasard dans un intervalle de temps $[a; b]$, et plus généralement, une mesure comprise au hasard entre deux valeurs a et b .

II.1 Définition

Définition 4 (Loi uniforme)

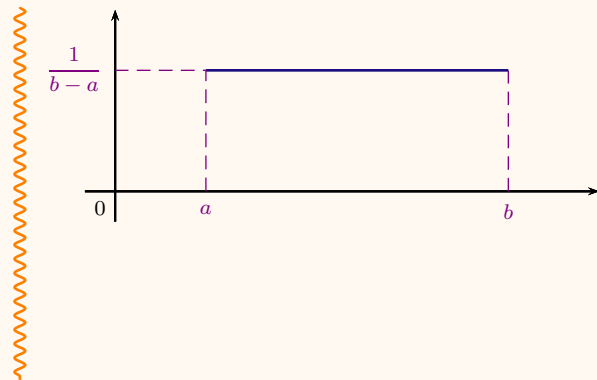
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Dire qu'une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur l'intervalle $[a; b]$ signifie que sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[a; b]$ par

$$f(t) = \frac{1}{b-a}$$



Preuve



La fonction f définie sur $[a; b]$ par $f(t) = \frac{1}{b-a}$ est une densité de probabilité sur $[a; b]$:

- f est définie, continue et positive sur $[a; b]$.
- et on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{b-a} dt &= \left[\frac{t}{b-a} \right]_a^b \\ &= \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1 \end{aligned}$$

II.2 Propriété

Théorème 1

X est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$.
Pour tout intervalle $[c; d]$ inclus dans $[a; b]$, on a :

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d - c}{b - a}$$



Preuve



$$\begin{aligned} P(c \leq X \leq d) &= \int_c^d \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{t}{b-a} \right]_c^d \\ &= \frac{d}{b-a} - \frac{c}{b-a} = \frac{d-c}{b-a} \end{aligned}$$

II.3 Espérance mathématique

Théorème 2

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ est donnée par la moyenne de a et b soit par le réel

$$E(X) = \frac{a + b}{2}$$



Preuve



$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b t \times \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{t^2}{2(b-a)} \right]_a^b \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

III La loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$



Remarque

Contexte général d'application de la loi exponentielle : la durée de vie d'un système non sujet à l'usure du temps (composants électroniques), le temps d'attente d'un évènement accidentel (tremblement de terre, désintégration d'un noyau radioactif).

III.1 Définition

Définition 5 (Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$)

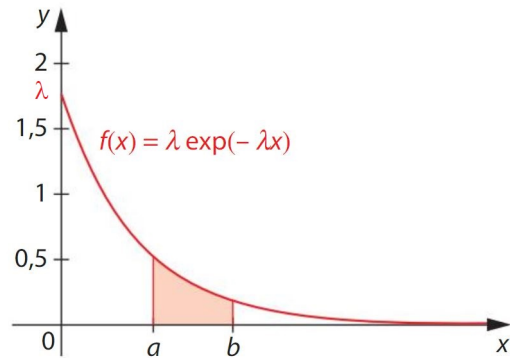
1. Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ , avec $\lambda > 0$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$ si, pour tous réels a et b , tels que $0 \leq a < b$, on a :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

2. La fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

est appelée fonction densité de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.



III.2 Propriétés

Propriété 2

Soit une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ , avec $\lambda > 0$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$ si, pour tous réels a et b , tels que $0 \leq a < b$, on a :

1. On a :

$$P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

2. et donc

$$P(X \leq b) = P(0 \leq X \leq b) = 1 - e^{-\lambda b} \quad \text{et} \quad P(X \geq a) = e^{-\lambda a}$$



Preuve

1. On a :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

2. Et

$$P(X \leq b) = P(0 \leq X \leq b) = e^{-\lambda \cdot 0} - e^{-\lambda b} = 1 - e^{-\lambda b}$$

3. Par ailleurs

$$\begin{aligned} P(X \geq a) &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}) \\ &= e^{-\lambda a} - \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{-\lambda b}) \end{aligned}$$

Or puisque $\lambda > 0$, on a $\lim_{b \rightarrow +\infty} -\lambda b = -\infty$ et donc par composition des limites :

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-\lambda b} = 0$$

Ce qui nous donne la limite cherchée.

III.3 ROC 1 : Durée de vie sans vieillissement

Propriété 3 (Durée de vie sans vieillissement)

Si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, alors pour tous réels positifs t et h :

$$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

Cette propriété traduit le fait que la loi exponentielle est « sans mémoire ».



ROC 1 : Exigible

Soit X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, alors pour tous réels $t \geq 0$ et $h \geq 0$, d'après la formule de Bayes :

$$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = \frac{P((X \geq t + h) \cap (X \geq t))}{P(X \geq t)}$$

Puisque $t \geq 0$ et $h \geq 0$ alors

$$(X \geq t + h) \cap (X \geq t) = (X \geq t + h)$$

et donc :

$$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = \frac{P(X \geq t + h)}{P(X \geq t)}$$

Par ailleurs, en appliquant la propriété 2 page 4, $P(X \geq a) = e^{-\lambda a}$ donc :

$$\begin{aligned} P_{X \geq t}(X \geq t + h) &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda h} \\ &= \underline{P(X \geq h)} \end{aligned}$$

III.4 ROC 2 : Espérance d'une v.a. suivant une loi exponentielle

Propriété 4 (Espérance)

Si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, de fonction de densité f , alors son espérance est :

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t.f(t) dt = \frac{1}{\lambda}$$



ROC 2 : Exigible (mais en donnant G si on n'a pas l'intégration par partie)

- Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, alors son espérance est donnée par la formule :

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t.f(t) dt$$

- La fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ est la fonction densité de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ donc on obtient :

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt$$

- Notons g la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $g(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$. Une primitive de g est la fonction G définie sur \mathbb{R}_+ par $G(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$ et donc :

$$\begin{aligned} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt &= G(x) - G(0) \\ &= -\left(x + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} + \left(0 + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda \times 0} \\ &= -\left(x + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \\ \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt &= -x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

– Or puisque $\lambda > 0$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = 0$$

– Et avec $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\lambda x = -\infty \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} y e^y = 0 \text{ (croissances comparées)} \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} -\lambda x e^{-\lambda x} = 0$$

De ce fait par somme de limites :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\lambda x e^{-\lambda x} = 0 \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(-x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\right)}_{\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt} = \frac{1}{\lambda}$$

- Pour conclure :

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

IV Lois normales

IV.1 Approximation de la loi binomiale centrée réduite

Lorsqu'une variable aléatoire X a pour espérance μ et pour écart-type (non nul) σ , la variable aléatoire $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ a pour espérance 0 et pour écart-type 1.

La variable aléatoire Z est appelée **variable centrée réduite associée à X** .

Théorème 3 (Théorème de Moivre-Laplace (Admis))

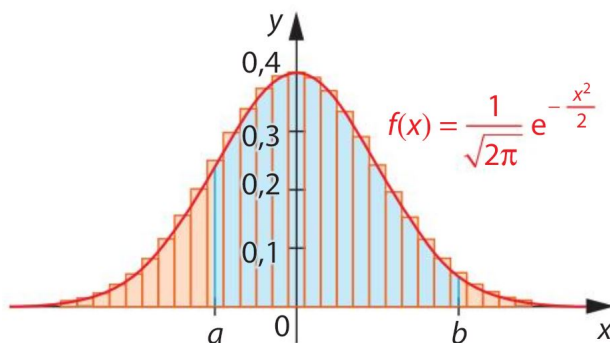
Soit pour tout entier n , une variable aléatoire X_n qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ et soit Z_n la variable centrée réduite associée à X_n :

$$Z_n = \frac{X_n - \mu}{\sigma}$$

Alors, pour tous les réels a et b , tels que $a < b$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

On résume cela en disant parfois que « la loi binomiale tend vers la loi normale. »



Remarque historique



Abraham de Moivre fut le premier à établir ce théorème en 1733 dans le cas particulier : $p = \frac{1}{2}$; et Laplace a pu le généraliser en 1812 pour toute valeur de p comprise entre 0 et 1. Il s'agit d'un cas particulier du théorème central limite.

IV.2 Loi normale centrée réduite

IV.2.1 Définition

Définition 6 (Loi normale centrée réduite)

- Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0 ; 1)$ signifie que sa

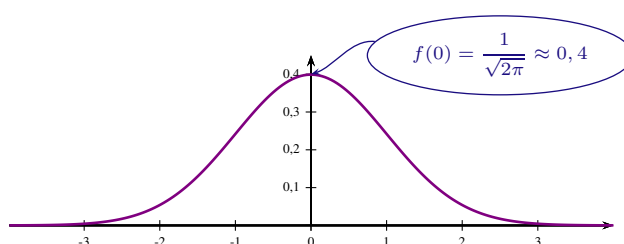
densité de probabilité est la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

- On a donc si X suit la loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0 ; 1)$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

IV.2.2 Courbe représentative

Pour tout réel x , $f(-x) = f(x)$, la courbe représentative de la densité f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



IV.2.3 Propriétés

Propriété 5

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

- L'aire sous la courbe de f est égale à 1, donc (ADMIS) :

$$P(-\infty \leq X \leq +\infty) = 1$$

- La fonction de densité f est paire sur \mathbb{R} donc la courbe \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- L'espérance de X vaut 0 soit $E(X) = 0$ (voir preuve en TD) :

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 t \times f(t) dt + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t \times f(t) dt = 0$$

- L'écart-type de X vaut 1 soit $\sigma(X) = 1$ (admis).

$$X \sim \mathcal{N}(0; 1) \implies \begin{cases} E(X) = \mu = 0 \\ \sigma(X) = \sigma = 1 \end{cases}$$

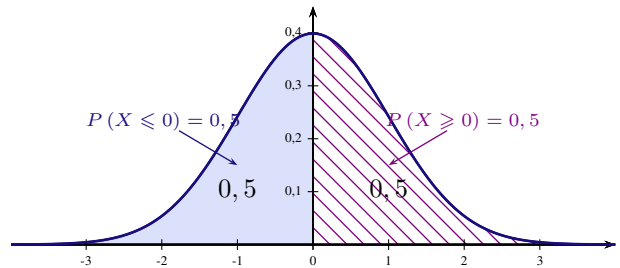
IV.2.4 Propriété

La courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc les mesures des aires égales aux probabilités $P(X \leq 0)$ et $P(X \geq 0)$ sont égales, d'où

$$P(X \leq 0) = P(X \geq 0)$$

Comme $P(X \leq 0) + P(X > 0) = 1$, on en déduit que

$$P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = \frac{1}{2}$$



Propriété 6

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$ on a :

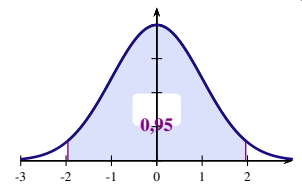
$$P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = \frac{1}{2}$$

IV.2.5 Intervalle associé à une probabilité donnée

On retient en particulier :

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$ alors :

$$P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95$$



IV.2.6 Loi normale et calculatrices : $P(a \leq X \leq b)$ et k tel que $P(X \leq k) = \alpha$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$. Pour la NUMWORKS, l'utilisation est très simple. Voici le tutoriel pour la Numworks : lien.

Les autres calculatrices traditionnelles permettent seulement de calculer :

1. $P(a \leq X \leq b)$
2. Le réel k tel que $P(X \leq k) = \alpha$ avec $\alpha \in]0; 1[$

	Sur TI 83	Sur Casio	Exemple avec $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$
Menu	2nde puis sur la touche ^{DISTR} var	OPTN puis STAT DIST NORM	
$P(a \leq X \leq b)$	2:normalFrep(a,b) normalCdf(a,b) borninf : a ; bornsup : b	Ncd normCD (a, b) Lower : a ; Upper : b	$P(-1 \leq X \leq 1) \approx 0.6827$
$P(X \leq k) = \alpha$	3:FracNormale(α) invNorm(α) aire : α	InvN InvNormCD(α) Area : α	$\begin{cases} P(X \leq k) = 0,8 \\ \implies k \approx 0,8416 \end{cases}$

IV.2.7 Autres calculs : $P(X > a)$ ou $P(X < a)$

Il n'est pas possible de déterminer les primitives de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$ à l'aide de fonctions usuelles. Du fait de la symétrie de la courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$, pour calculer $P(X \leq a)$ ou $P(X \geq a)$, on peut utiliser la méthode suivante :

Probabilité	$P(X \leq a)$ avec $a < 0$	$P(X \leq a)$ avec $a > 0$	$P(X \geq a)$ avec $a < 0$	$P(X \geq a)$ avec $a > 0$
Graphique				
Calcul	$0,5 - P(a < X < 0)$	$0,5 + P(0 < X \leq a)$	$0,5 + P(a \leq X < 0)$	$0,5 - P(0 < X < a)$
Exemples avec $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$	$\begin{cases} P(X \leq -1) \\ = 0,5 - P(-1 < X < 0) \\ \approx 0,1587 \end{cases}$	$\begin{cases} P(X \leq 1) \\ = 0,5 + P(0 < X < 1) \\ \approx 0,8413 \end{cases}$	$\begin{cases} P(X \geq -1) \\ = 0,5 + P(-1 < X < 0) \\ \approx 0,8413 \end{cases}$	$\begin{cases} P(X \geq 1) \\ = 0,5 - P(0 < X < 1) \\ \approx 0,1587 \end{cases}$

Propriété 7

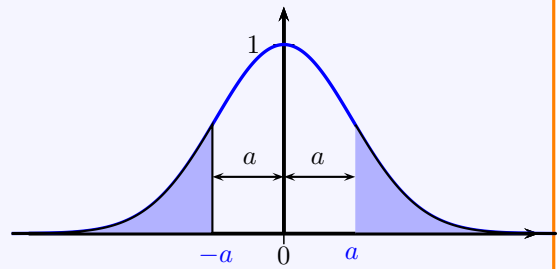
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

1. La fonction Φ est définie sur \mathbb{R} par

$$\Phi(t) = P(X \leq t)$$

2. Pour tout réel a on a :

- (1) : $P(X \leq -a) = P(X \geq a)$
- (2) : $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
- (3) : $P(-a \leq X \leq a) = 2\Phi(a) - 1$



IV.3 Loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

IV.3.1 Définition

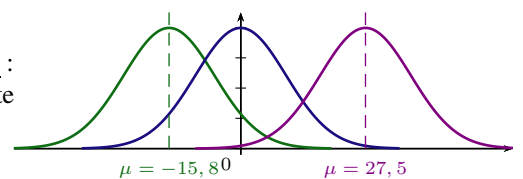
Définition 7

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ , signifie que la variable aléatoire $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.
On note : X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.

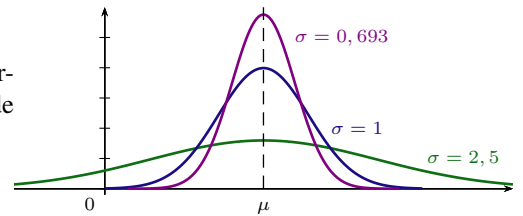
$$X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2) \iff Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0; 1)$$

Remarques :

- Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ alors sa variance $V(X) = \sigma^2$.
- L'espérance μ de la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ est un paramètre de position : la courbe de la fonction de densité admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \mu$.



- L'écart-type $\sigma > 0$ de la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ est un paramètre de dispersion : plus σ est élevé, plus les réalisations de X sont dispersées autour de μ .

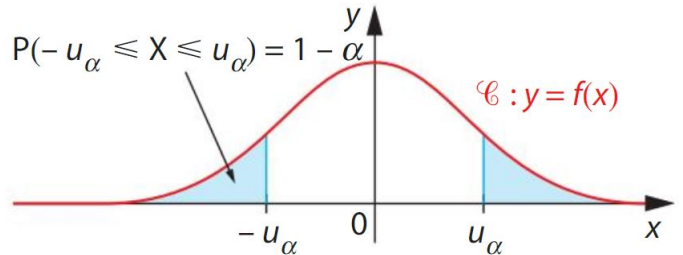


IV.3.2 ROC 3

Théorème 4 (ROC 3)

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu = 0 ; \sigma^2 = 1)$, alors, pour tout réel $\alpha \in [0 ; 1]$, il existe un unique réel positif u_α tel que :

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$



ROC 3 : ROC Exigible

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu = 0 ; \sigma^2 = 1)$, on a :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_a^b f(x) dx$$

Pour $u \geq 0$, soit h la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $h(u) = P(-u \leq X \leq u)$.

- Puisque \mathcal{C} est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (la fonction densité de probabilité f est paire sur \mathbb{R}), on a :

$$h(u) = P(-u \leq X \leq u) = \int_{-u}^u f(x) dx = 2 \int_0^u f(x) dx$$

En notant F la primitive de f qui s'annule en 0 on obtient :

$$h(u) = 2 \int_0^u f(x) dx = 2F(u) - 2F(0) = 2F(u)$$

- La fonction h est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ puisque la fonction f est strictement positive sur \mathbb{R} . Par ailleurs $h(0) = 0$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} h(u) = 1$.

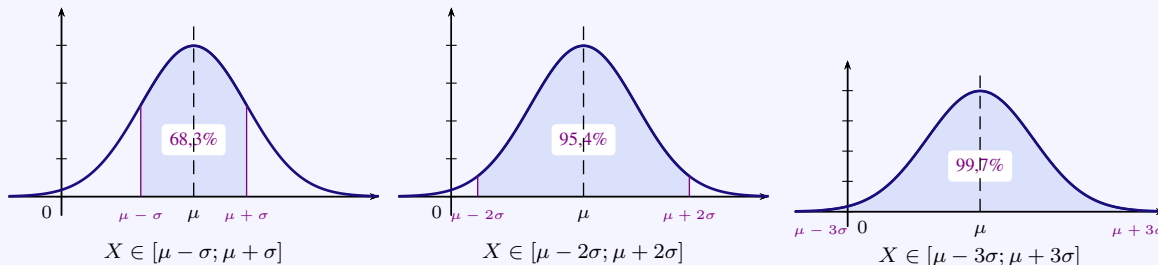
Or le réel $(1 - \alpha) \in]0 ; 1[$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaire, l'équation $h(u) = 1 - \alpha$ admet une unique solution u_α sur \mathbb{R}_+ .

IV.3.3 Conséquence : intervalles des 1,2 ou 3 σ

Propriété 8 (dite des « 1 σ , 2 σ , 3 σ »)

Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ alors :

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683.$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954.$
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997.$



IV.3.4 Loi normale et calculs : $P(a \leq X \leq b)$ et k tel que $P(X \leq k) = \alpha$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Les calculatrices permettent de calculer : $P(a \leq X \leq b)$ et le réel k tel que $P(X \leq k) = \alpha$ avec $\alpha \in]0; 1[$.

	Sur TI 83	Sur Casio	Exemples, $X \sim \mathcal{N}(10; 5^2)$
Menu	2nde puis sur la touche ^{DISTR} var	OPTN puis STAT DIST NORM	
$P(a \leq X \leq b)$	2:normalFrep(a, b, μ, σ) ou normalCdf(a, b, μ, σ) borninf : a ; bornsup : b puis, renseigner μ et σ	Ncd normCD(a, b, σ, μ) Lower : a ; Upper : b puis, renseigner σ et μ	$P(5 \leq X \leq 20) \approx 0,8186$
$P(X \leq k) = \alpha$	3:FracNormale(α, μ, σ) ou invNorm(α, μ, σ) aire : α puis, renseigner μ et σ	InvN InvNormCD(α, σ, μ) Area : α puis, renseigner σ et μ	$\begin{cases} P(X \leq k) = 0,8 \\ \implies k \approx 14,2 \end{cases}$

IV.3.5 Propriétés $P(X < a)$

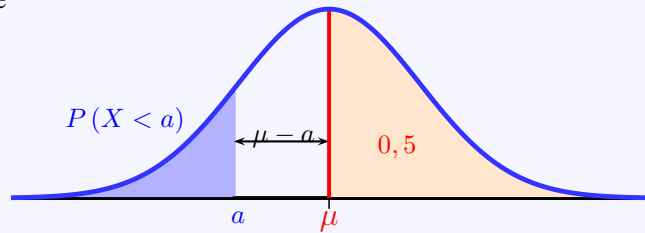
Propriété 9 ($P(X < a) ; a < \mu$)

Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ alors on a :

$$P(X < \mu) = 0,5 = P(X > \mu)$$

De plus pour tout réel a avec $a < \mu$:

$$P(X < a) = 0,5 - P(a < X < \mu)$$



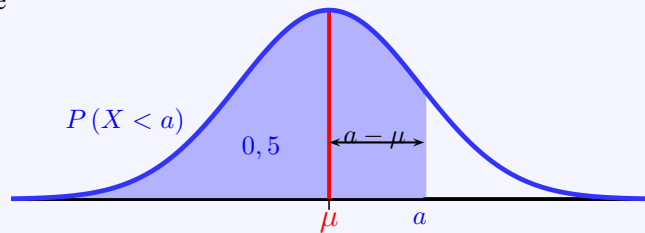
Propriété 10 ($P(X < a) ; a > \mu$)

Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ alors on a :

$$P(X < \mu) = 0,5 = P(X > \mu)$$

De plus pour tout réel a avec $a > \mu$:

$$P(X < a) = 0,5 + P(\mu < X < a)$$



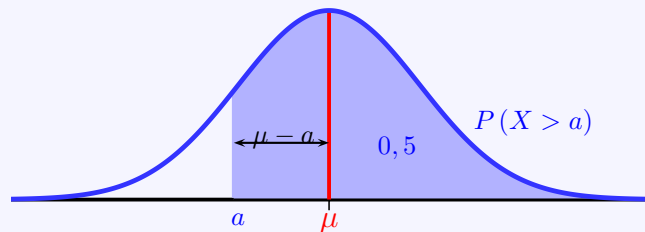
Propriété 11 ($P(X > a) ; a < \mu$)

Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ alors on a :

$$P(X < \mu) = 0,5 = P(X > \mu)$$

De plus pour tout réel a avec $a < \mu$:

$$P(X > a) = P(a < X < \mu) + 0,5$$



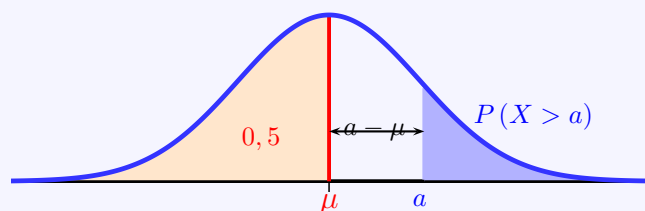
Propriété 12 ($P(X > a) ; a > \mu$)

Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ alors on a :

$$P(X < \mu) = 0,5 = P(X > \mu)$$

De plus pour tout réel a avec $a > \mu$:

$$P(X > a) = 0,5 - P(\mu < X < a)$$



IV.4 Bilan

Probabilité	$P(X \leq a)$ avec $a < \mu$	$P(X \leq a)$ avec $a > \mu$	$P(X \geq a)$ avec $a < \mu$	$P(X \geq a)$ avec $a > \mu$
Graphique				
Calcul	$0,5 - P(a < X < \mu)$	$0,5 + P(\mu < X \leq a)$	$0,5 + P(a \leq X < \mu)$	$0,5 - P(\mu < X < a)$

↔ Fin du cours ↔