Math93.com

DM - Terminale S

Exponentielle (Correction)

Exercice 1. Étude de fonction ... comme au bac (DM)

Soit f la fonction de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ définie sur $[0\,;\,+\infty]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{\,x} - \frac{x^2}{2} - 2x - 2$$

1. Calculer f' la dérivée de f puis la dérivée seconde f''.

- La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty]$ et, pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty]$ on a :

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\,x} - x - 2$$

- La fonction f' est dérivable sur $[0\,;\,+\infty]$ et, pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty]$ on a :

$$f''(x) = \mathrm{e}^{\,x} - 1$$

2. Étudier le signe de f'' et en déduire les variations de f'.

Pour tout x de $[0\,;\,+\infty]$:

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \iff \mathrm{e}^{\,x} > 1 = \mathrm{e}^{\,0} \iff x > 0 \text{ car la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ f''(x) = 0 \iff x = 0 \end{cases}$$

Donc f'' est positive ou nulle sur $[0\,;\,+\infty]$, f' est donc strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty]$.

3. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,+\infty]$. Donner un encadrement de α au millième.

x	0	α	2	$+\infty$
Variations de f'	-1	0	≈ 3.4	↗

- <u>Sur $[2\,;\,+\infty[$</u>
La fonction f' est strictement croissante et de minimum $f'(2) > 0$. Donc l'équation $f'(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

- <u>Application du corollaire sur $[0\,;\,2]$</u> :
  - La fonction f' est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[0\,;\,2]$;
  - Le réel $k = 0$ est compris entre $f'(0) = -1$ et $f'(2) = \mathrm{e}^{\,2} - 4 \approx 3.4$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
  l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.

- <u>Valeur approchée</u> .
Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.
  - Avec un pas de $\Delta = 0.001$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcr} f'(1,146) & \approx & -0,0004 < 0 \\ f'(1,147) & \approx & 0,0017 > 0 \end{array}\right| \text{, donc } \boxed{1,146 < \alpha < 1,147}.$$

4. En déduire les variations de f sur $[0\,;\,+\infty]$.

On obtient alors le signe de f' et les variations de f.

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	-1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

5. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha\left(\dfrac{\alpha}{2}+1\right)$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ au centième.

On a :

$$\begin{cases} f(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha} - \dfrac{\alpha^2}{2} - 2\alpha - 2 \\ f'(\alpha) = 0 \iff \mathrm{e}^{\alpha} = \alpha + 2 \end{cases} \Rightarrow f(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha} - \dfrac{\alpha^2}{2} - 2\alpha - 2 = \alpha + 2 - \dfrac{\alpha^2}{2} - 2\alpha - 2$$

Donc

$$\boxed{f(\alpha) = -\alpha\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}$$

Donc puisque :

$$1,146 < \alpha < 1,147 \Longrightarrow 1,572 < \left(\frac{\alpha}{2}+1\right) < 1,5735$$

Les termes étant tous positifs, on peut multiplier membres à membres les deux inégalités et on obtient :

$$\begin{cases} 1,146 < \alpha < 1,147 \\ 1,572 < \left(\dfrac{\alpha}{2}+1\right) < 1,5735 \end{cases} \Longrightarrow 1,146 \times 1,572 < \alpha\left(\frac{\alpha}{2}+1\right) < 1,147 \times 1,5735$$

D'où au centième

$$\boxed{-1,81 < f(\alpha) < -1,80}$$

Remarque

On pouvait aussi étudier les variations de la fonction $h \ : \ x \longmapsto -x\left(\dfrac{x}{2}+1\right)$. Cette fonction est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty]$ et donc on a facilement :

$$1,146 < \alpha < 1,147 \Longrightarrow h(1,147) \approx -1,81 < f(\alpha) < h(1,146) \approx -1,80$$

6. Déterminer l'équation de la tangente T_2 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2, puis celle de la tangente T_α à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse α.

- L'équation de la tangente T_2 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2, est :

$$y = (e^2 - 4)x - e^2$$

- L'équation de la tangente T_α à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse α, est :

$$y = -\alpha\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)$$

  C'est une tangente horizontale.

7. Tracer $\mathscr{C}_f$ et les tangentes T_2 et T_α.