Math93.com

DM - Terminale S

Fonctions

Correction de l'exercice 11 du TD fonctions et continuité : Encore une fonction auxiliaire

On cherche à étudier la fonction f définie sur $]-1\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2-1}$.

1. *Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x-4$.*

1. a. Dresser le tableau de variations de g (justifier).

La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$g'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$$

g' est une fonction polynôme du second degré, dont les racines sont 1 et (-1), elle est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines soit positive. On obtient :

x	$-\infty$		-1		1	α	3		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$		
Variations de g		$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	0	14	$\nearrow$	

1. b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution réelle α, et déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de x.

- Sur $]-\infty\,;\,1]$: d'après l'étude menée précédemment, la fonction g admet (-2) comme maximum sur cet intervalle, donc l'équation $g(x)=0$ n'y admet pas de solution.
- Sur $[3\,;\,+\infty[$: la fonction g est strictement croissante de minimum $g(3)=14>0$, donc l'équation $g(x)=0$ n'y admet pas de solution.
- Sur $[1\,;\,3[$:
  - La fonction g est continue et strictement croissante sur $[1\,;\,3[$.
  - $k=0$ est compris entre $g(1)=-6$ et $g(3)=14$.
  - Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaire, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α et $1<\alpha<3$.
- Conclusion : l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$ et $1<\alpha<3$.

On obtient donc d'après le tableau de variations :

x	$-\infty$		$1<\alpha<3$		$+\infty$
Signe de g		$-$	0	$+$	

1. c. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

La calculatrice donne :

$$\begin{cases} g(2,19)\approx -0,0665<0 \\ g(2,20)\approx 0,048>0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{2,19<\alpha<2,20}$$

2. **Justifier que f est dérivable sur $]-1\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ et vérifier que : $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.**

La fonction f est définie et dérivable sur $]-1\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ car quotient d'un fonction polynômes par une fonction polynôme que ne s'annule pas sur $]-1\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$.

Pour tout réel x de $]-1\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ on a :

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x^2-1)-(x^3+2)(2x)}{(x^2-1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{3x^4-3x^2-2x^4-4x}{(x^2-1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2}$$

Pour x de $]-1\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$:

$$\boxed{f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}}$$

3. **En déduire les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de la fonction f.**

Sur $]-1\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$, le dénominateur $(x^2-1)^2$ est strictement positif donc f' est du signe du numérateur $xg(x)$.

On reprend alors les résultats de la question (1.b) qui nous donne le signe de g, le signe de x étant trivial, on obtient le signe de f' et donc les variations de f.

x	-1		0		1		α		$+\infty$
Signe de x	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
Signe de $g(x)$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
Signe de $xg(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Soit

x	-1		0		1		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖	↗	-2	↘	‖	↘	$f(\alpha)$	↗	

4. Complément

4. a. Montrer que α vérifie l'égalité : $f(\alpha) = \dfrac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$.

Puisque $g(\alpha) = 0$ on a :

$$\alpha^3 = 3\alpha + 4$$

et donc

$$f(\alpha) = \frac{3\alpha+4+2}{\alpha^2-1} = \frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$$

4. b. On suppose que $2 < \alpha < 3$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

La fonction h définie sur $[2\,;\,3]$ par :

$$h(x) = \frac{3x+6}{x^2-1}$$

est dérivable sur cet intervalle et l'on obtient :

$$h'(x) = \frac{-3(x^2+4x+1)}{(x^2-1)^2}$$

Or sur $[2\,;\,3]$ l'expression (x^2+4x+1) est clairement strictement positive, et le dénominateur $(x^2-1)^2$ est strictement positif.

De ce fait, h' est strictement négative sur $[2\,;\,3]$ et la fonction h est strictement décroissante sur $[2\,;\,3]$.

De ce fait,

$$2 < \alpha < 3 \Longrightarrow h(3) < h(\alpha) < h(2)$$

et donc

$$\boxed{1{,}875 < f(\alpha) < 4}$$

Correction de l'exercice 83 page 60

Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Pour x de $\mathbb{R}^*$ on a :

$$\boxed{f^{(1)}(x) = \frac{-1}{x^2}} \; ; \; \boxed{f^{(2)}(x) = \frac{2}{x^3}} \; ; \; \boxed{f^{(3)}(x) = \frac{-6}{x^4}} \; ; \; \boxed{f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}}$$

2. On observe que : $f^{(n)}(x) = \dfrac{a_n}{x^{n+1}}$

2. a. On a donc :

$$a_1 = -1 \; ; \; a_2 = 2 \; ; \; a_3 = -6 \; ; \; a_4 = 24$$

2. b. On peut conjecturer que : $a_5 = -120$. On a :

$$f^{(5)}(x) = \left(24x^{-5}\right)' = -120x^{-6}$$

2. c. On peut conjecturer que pour n entier non nul : $a_n = (-1)^n \times n!$. Notons pour tout entier naturel $n \geq 1$ la propriété

$$P(n) \; : \; a_n = (-1)^n \times n!$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$, la propriété $P(n)$ est vraie puisque : $a_1 = -1 = (-1)^1 \times 1!$
- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$.

  Remarque

  On admet que :
  - $a_n = (-1)^n \times n!$

  Et on cherche à montrer que :

  $\boxed{a_{n+1} = (-1)^{n+1} \times (n+1)!}$ à prouver

  On applique l'hypothèse de récurrence qui implique que $P(n)$ soit vérifiée et donc que $a_n = (-1)^n \times n!$. On compose dérive alors l'expression :

  $$f^{(n+1)}(x) = \left(a_n x^{-n-1}\right)' = (-1) \times a_n \times (n+1)x^{-n-2}$$

  or

  $$a_n = (-1)^n \times n!$$

  Donc

  $$f^{(n+1)}(x) = (-1) \times (-1)^n \times n! \times (n+1)x^{-n-2} = (-1)^{n+1} \times (n+1)! \times \frac{1}{x^{n+2}}$$

  On a alors montré que $a_{n+1} = (-1)^{n+1} \times (n+1)!$ et donc que $P(n+1)$ est vraie. La propriété est donc héréditaire.
- **Conclusion**
  On a montré que $P(1)$ est vraie. De plus, la propriété est héréditaire. De ce fait la relation est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

  $$\boxed{a_n = (-1)^n \times n!}$$

Fin du devoir