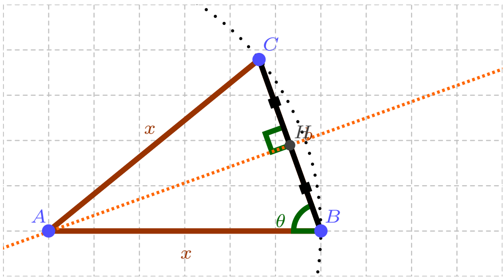
Math93.com

DM - Terminale S

Fonctions (Correction)

Exercice 1. Triangles isocèles à périmètre constant : éléments de correction

Exercice 65 page 154. Math'X Term S Didier (éd.2016)
Les distances seront exprimées en cm.



1. Figure et conjecture sur Geogebra des variations de la fonction aire $\mathcal{A}$.

On pose

$$b = BC \ ; \ x = AB \ ; \ \theta = \widehat{ABC} \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \ ; \ \mathcal{A}(\theta) = Aire(ABC)$$

1. a. Exprimer BC en fonction de AB puis en fonction de AB et θ. En déduire AB puis BC en fonction de θ.

- **Exprimer $BC = b$ en fonction de $AB = x$.**
  Le périmètre de ABC isocèle est de 16 donc : $b = 16 - 2x$
- **Exprimer $BC = b$ en fonction de $AB = x$ et θ.**
  Si H est le milieu du segment [BC]. On se place dans le triangle ABH, rectangle et isocèle en H. On obtient alors :
  $$\cos(\theta) = \frac{BH}{AB} = \frac{b/2}{x} \Longrightarrow b = 2x\cos(\theta)$$
- **En déduire AB puis BC en fonction de θ.**
  De ce fait :
  $$\begin{cases} b = 16 - 2x \\ b = 2x\cos\theta) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{AB = x = \frac{8}{1+\cos\theta}} \text{ et } \boxed{BC = b = \frac{16\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

1. b. Montrer que : $\mathcal{A}(\theta) = 64\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}$.

$$\mathcal{A}(\theta) = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{b \times AH}{2}$$

Or dans le triangle ABH, rectangle et isocèle en H :

$$\sin\theta = \frac{AH}{x}$$

Donc

$$\mathcal{A}(\theta) = \frac{b \times x\sin\theta}{2}$$

On utilise alors les résultats précédents :

$$\boxed{\mathcal{A}(\theta) = 64\frac{\sin\theta\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}}$$

1. c. Variations de $\mathcal{A}$.
$\mathcal{A}$ est dérivable que $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et on obtient :

$$\boxed{\mathcal{A}'(\theta) = 64\frac{2\cos^2\theta + \cos\theta - 1}{(1+\cos\theta)^3}}$$

Sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, le dénominateur est strictement positif donc $\mathcal{A}'(\theta)$ est du signe de $(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1)$.

- En posant $X = \cos\theta$ on obtient une expression du second degré : $2X^2 + X - 1$ de discriminant $\Delta = 9 > 0$ et admettant deux racines réelles $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$.

  Notons que puisque $\theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, on a $X = \cos\theta \in [0\,;\,1]$ donc sur cet intervalle :
- Sur

X	0		$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$		1
Signe de $2X^2 + X - 1$		$-$	0	$+$	

- Sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$ on a $\cos\theta \geq \frac{1}{2}$, donc $(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1) \geq 0$ et $\mathcal{A}'(\theta) \geq 0$.
- Sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ on a $0 \leq \cos\theta \leq \frac{1}{2}$, donc $(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1) \leq 0$ et $\mathcal{A}'(\theta) \leq 0$.
- On a donc :

X	0	$\theta_1 \approx 0.53$	$\frac{\pi}{3}$	$\theta_2 \approx 1.39$	$\frac{\pi}{2}$
Signe de $\mathcal{A}'$		$+$	0	$-$	
Variantions de $\mathcal{A}$	0	8	$\mathcal{A}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{64\sqrt{3}}{9} \approx 12.3$	8	0

2. Le maximum de la fonction $\mathcal{A}$ est donc atteint en $\theta = \frac{\pi}{3}$ et vaut :

$$\mathcal{A}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{64\sqrt{3}}{9} \approx 12,3$$

   Cela correspond au cas où le triangle ABC est équilatéral.

3. **Déterminer une v.a. des valeurs de θ correspondant à deux triangles de 8 cm^2.**
   Il suffit d'appliquer le corolaire du TVI. On montre facilement que l'équation $\mathcal{A}(\theta) = 8$ admet deux solution sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ dont on détermine un encadrement :

$$\boxed{\theta_1 \approx 0,53 \text{ et } \theta_2 \approx 1,39}$$

Exercice 2. Une fonction à paramètre : éléments de correction

Partie A

Pour tout réel $m > 0$, on définit sur $[0\,;\,+\infty[$ la fonction f_m par :

$$f_m(x) = 3x^4 - 6mx^3 + 1$$

Le but de cette partie est de déterminer le nombre de solutions dans $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation $f_m(x) = 0$, suivant les valeurs de m.

1. **Sur Geogebra, définir un curseur m allant de 0,01 à 10. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}_m$ de la fonction f_m. Émettre une conjecture sur le nombre de solutions de l'équation $f_m(x) = 0$ suivant les valeurs de m.**

2. **Justifier avec soin et rigueur toutes les informations données dans le tableau de variation ci-dessous :**

x	0		$\frac{3m}{2}$	$2m$	$+\infty$
Signe de $f'_m(x)$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f_m	1		$f_m\left(\frac{3m}{2}\right)$	1	

- Pour x de $[0\ ;\ +\infty[$ et $m > 0$ les fonction f_m sont définies et dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$. On obtient :
$$f'_m(x) = 6x^2(2x - 3m)$$
Les racines sont donc 0 et $x = \dfrac{3m}{2}$.
Par ailleurs, puisque $x^2 \geq 0$ la dérivée est du signe de $(2x - 3m)$ dont l'étude de signe est trivial. On obtient bien les variations du tableau.
- Il reste à calculer $f_m\left(0\right)$ et $f_m\left(1\right)$ ce qui est aisé.

3. Vérifier que pour tout réel $m > 0$: $f_m\left(\dfrac{3m}{2}\right) = \left(1 + \dfrac{9m^2}{4}\right)\left(1 + \dfrac{3m}{2}\right)\left(1 - \dfrac{3m}{2}\right)$.

- D'une part :
$$f_m\left(\frac{3m}{2}\right) = 3\left(\frac{3m}{2}\right)^4 - 6m\left(\frac{3m}{2}\right)^3 + 1 = 1 - \frac{81m^4}{16}$$
- D'autre part :
$$\left(1 + \frac{9m^2}{4}\right)\left(1 + \frac{3m}{2}\right)\left(1 - \frac{3m}{2}\right) = \left(1 + \frac{9m^2}{4}\right)\left(1 - \left(\frac{3m}{2}\right)^2\right) = 1 - \left(\frac{3m}{2}\right)^4$$
- De ce fait :
$$\boxed{f_m\left(\frac{3m}{2}\right) = \left(1 + \frac{9m^2}{4}\right)\left(1 + \frac{3m}{2}\right)\left(1 - \frac{3m}{2}\right)}$$

En déduire le signe de cette expression suivant les valeurs de m.
Puisque $m > 0$, les facteurs $\left(1 + \dfrac{9m^2}{4}\right)$ et $\left(1 + \dfrac{3m}{2}\right)$ sont strictement positif.
$f_m\left(\dfrac{3m}{2}\right)$ est du signe du facteur $\left(1 - \dfrac{3m}{2}\right)$, de racine $m = \dfrac{2}{3}$ et dont l'étude de signe est aisée.

m	0		$\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $f_m\left(\dfrac{3m}{2}\right)$		$+$	0	$-$	

4. Justifier alors que lorsque $m > \dfrac{2}{3}$, l'équation $f_m(x) = 0$ a exactement deux solutions dans $[0\ ;\ +\infty[$.
Si $m > \dfrac{2}{3}$ alors d'après la question précédente $f_m\left(\dfrac{3m}{2}\right) < 0$ et on peut appliquer le corollaire du TVI.

- Sur $\left[0\,;\,\dfrac{3m}{2}\right]$.
  - f est strictement décroissante et continue.
  - $k = 0$ est compris entre $f_m(0) = 1$ et $f_m\left(\dfrac{3m}{2}\right) < 0$.
  - Donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f_m(x) = 0$ y admet une unique solution.
- Sur $\left[\dfrac{3m}{2}\,;\,2m\right]$.
  - f est strictement croissante et continue.
  - $k = 0$ est compris entre $f_m(2m) = 1$ et $f_m\left(\dfrac{3m}{2}\right) < 0$.
  - Donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f_m(x) = 0$ y admet une unique solution.
- $[2m\,;\,+\infty]$.
f est continue et strictement croissante, de minimum $f(2m) = 1 > 0$. Donc l'équation $f_m(x) = 0$ n'y admet pas de solution.
- <u>Conclusion</u> : lorsque $m > \dfrac{2}{3}$, l'équation $f_m(x) = 0$ a exactement deux solutions dans $[0\ ;\ +\infty[$.

5. Qu'en est-il lorsque $m = \dfrac{2}{3}$? lorsque $m < \dfrac{2}{3}$?

- Si $m = \dfrac{2}{3}$, alors d'après la factorisation de la question (3.), on a : $f_m\left(\dfrac{3m}{2}\right) = 0$. Donc lorsque $m = \dfrac{2}{3}$, l'équation $f_m(x) = 0$ admet une solution unique dans $[0\ ;\ +\infty[$.
- Si $m < \dfrac{2}{3}$, alors d'après la question (3.), on a : $f_m\left(\dfrac{3m}{2}\right) > 0$. Donc lorsque $m = \dfrac{2}{3}$, l'équation $f_m(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ dans un repère orthonormé du plan par : $g(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{3}}$.
Pour tout réel $r > 0$, on note Γ le cercle de centre $\Omega(r\ ;\ 0)$ et de rayon r dans ce même repère.
Déterminer suivant les valeurs du réel r le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de Γ.

- Le cercle Γ est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tel que :

$$(x-r)^2 + (y-0)^2 = r^2 \iff x^2 - 2rx + y^2 = 0$$

Les éventuels points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de Γ sont les solutions, pour $x \in]0\ ;\ +\infty[$ de :

$$\begin{cases} x^2 - 2rx + y^2 = 0 \\ y = \dfrac{1}{x\sqrt{3}} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2rx + \left(\dfrac{1}{x\sqrt{3}}\right)^2 = 0 \\ y = \dfrac{1}{x\sqrt{3}} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2 - 2rx + \dfrac{1}{3x^2} = 0 \\ y = \dfrac{1}{x\sqrt{3}} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3x^4 - 6rx^3 + 1 = 0 \quad (x > 0) \\ y = \dfrac{1}{x\sqrt{3}} \end{cases}$$

On retrouve alors l'expression de la partie A avec $m = r$. De ce fait :

- Si $m = r = \dfrac{2}{3}$, alors l'équation $f_m(x) = 0$ admet une solution unique dans $[0\ ;\ +\infty[$ et donc les deux courbes ont un unique point d'intersection.
- Si $m < \dfrac{2}{3}$, les deux courbes n'ont aucun point d'intersection.
- Si $m = r > \dfrac{2}{3}$, alors l'équation $f_m(x) = 0$ admet deux solutions dans $[0\ ;\ +\infty[$ et donc les deux courbes ont deux points d'intersection.