Math93.com

DM - Terminale S

Probabilités et Lois à densité

Exercice 1. DM (Devoir Maison à rendre)

On étudie certaines caractéristiques d'un magasin d'une petite agglomération.

Partie A

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,2$.
On rappelle que l'espérance de la variable aléatoire X, notée $E(X)$, est égale à :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x 0,2t\mathrm{e}^{-0,2t}\,\mathrm{d}t.$$

Le but de cette partie est de démontrer que $E(X)=5$.

1. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t)=0,2t\mathrm{e}^{-0,2t}$.
On définit la fonction G sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $G(t)=(-t-5)\mathrm{e}^{-0,2t}$.
Vérifier que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. En déduire que la valeur exacte de $E(X)$ est 5.

Partie B

Une étude commandée par le gérant du magasin permet de modéliser la durée, exprimée en minutes, passée dans le magasin par un client choisi au hasard par une variable aléatoire T.
Cette variable T suit une loi normale d'espérance 40 minutes et d'écart type un réel positif noté σ.
Grâce à cette étude, on estime que $P(T<10)=0,067$.

1. Déterminer une valeur arrondie du réel σ à la seconde près.

2. Dans cette question, on prend $\sigma=20$ minutes. Quelle est alors la proportion de clients qui passent plus d'une heure dans le magasin ?

Partie C

Ce magasin laisse le choix au client d'utiliser seul des bornes automatiques de paiement ou bien de passer par une caisse gérée par un opérateur.

1. La durée d'attente à une borne automatique, exprimée en minutes, est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,2$ min^{-1}.

1. a. Donner la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement.

1. b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes.

2. L'étude commandée par le gérant conduit à la modélisation suivante :

- parmi les clients ayant choisi de passer à une borne automatique, 86 % attendent moins de 10 minutes ;
- parmi les clients passant en caisse, 63 % attendent moins de 10 minutes.

On choisit un client du magasin au hasard et on définit les évènements suivants :

B : « le client paye à une borne automatique » ;

$\overline{B}$: « le client paye à une caisse avec opérateur » ;

S : « la durée d'attente du client lors du paiement est inférieure à 10 minutes ».

Une attente supérieure à dix minutes à une caisse avec opérateur ou à une borne automatique engendre chez le client une perception négative du magasin. Le gérant souhaite que plus de 75 % des clients attendent moins de 10 minutes.

Quelle est la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint ?

Partie D

Lors du paiement, des cartes à gratter, gagnantes ou perdantes, sont distribuées aux clients. Le nombre de cartes distribuées dépend du montant des achats. Chaque client a droit à une carte à gratter par tranche de 10 € d'achats.
Par exemple, si le montant des achats est 58,64 €, alors le client obtient 5 cartes ; si le montant est 124,31 €, le client obtient 12 cartes.
Les cartes gagnantes représentent $0,5$ % de l'ensemble du stock de cartes. De plus, ce stock est suffisamment grand pour assimiler la distribution d'une carte à un tirage avec remise.

1. Un client effectue des achats pour un montant de 158,02 €.

Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il obtienne au moins une carte gagnante ?

2. À partir de quel montant d'achats, arrondi à 10 €, la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante est-elle supérieure à 50 % ?

Fin du devoir