Math93.com

Devoir Surveillé n°1 Correction

TS

Suites et récurrence

Durée 2 heures - Coeff. 7

Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. Un problème de four — 4 points

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.
On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.
La température du four est exprimée en degré Celsius (° C).
La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70° C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.
Pour un nombre entier naturel n, on note T_n la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc $T_0 = 1000$.
La température T_n est calculée par l'algorithme suivant :

```
T ← 1000
Pour i allant de 1 à n
        T ← 0,82 × T + 3,6
Fin Pour
```

1. Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement.

Corrigé

La variable T prend successivement les valeurs suivantes (arrondies à l'unité) :

i		1	2	3	4
T	1000	824	679	560	463

Au bout de 4 heures de refroidissement la température du four est d'environ 463 degré Celcius.

2. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$.

Corrigé

Montrons par récurrence que $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$.

- Initialisation : Si $n = 0$ alors $980 \times 0,82^0 + 20 = 1000 = T_0$. La propriété est vraie au rang 0
- Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n : $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$. Montrons qu'elle est également vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que $T_{n+1} = 980 \times 0,82^{n+1} + 20$.
  Pour n entier naturel on a par définition de la suite (T_n) :
  $$\begin{aligned} T_{n+1} &= 0,82 T n + 3,6 \\ &= 0,82\left(980 \times 0,82^n + 20\right) + 3,6 \\ &= 980 \times 0,82^{n+1} + 16,4 + 3,6 \\ T_{n+1} &= 980 \times 0,82^{n+1} + 20 \end{aligned}$$
  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. Par conséquent, pour tout entier naturel n on a $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$.

3. Étudier la monotonie de la suite (T_n).

Corrigé

Pour tout entier n on a :

$$T_{n+1} - T_n = 980 \times 0,82^{n+1} + 20 - 980 \times 0,82^n - 20$$
$$T_{n+1} - T_n = 980 \times 0,82^n \times 0,82^1 - 980 \times 0,82^n$$
$$T_{n+1} - T_n = 980 \times 0,82^n \times (0,82 - 1)$$
$$T_{n+1} - T_n = \underbrace{980 \times 0,82^n}_{>0} \times (-0,18) < 0$$

Donc la suite (T_n) est strictement décroissante.

4. Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?
Utilisez la calculatrice pour répondre à cette question en expliquant votre raisonnement.

Corrigé

La suite des température est strictement décroissante et :

$$\begin{cases} u_{14} \approx 81 > 70 \\ u_{15} \approx 69,9 < 70 \end{cases}$$

Le four peut être ouvert sans risque pour les céramiques au bout de <u>15 heures</u>.

Exercice 2. Conjecture et démonstration — 8 points

Soit (u_n) la suite définie pour n entier par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$$

1. Montrer que $u_1 = 4$ puis calculer u_2 et u_3.

Corrigé

n	0	1	2	3
u_n	1	4	9	16

2. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

Corrigé

Pour tout entier $n \geq 0$ on a :

$$u_{n+1} - u_n = 2n + 3 \geq 3 > 0$$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

3. Démontrer que pour tout entier n on a : $u_n > n^2$.

Corrigé

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ la propriété

$$P(n) \;:\; u_n > n^2$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, la propriété $P(n)$ est vraie puisque : $u_0 = 1 > 0^2 = 0$

- **Hérédité**
Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$.

Remarque

L'hypothèse de récurrence est :

(HR) : $\boxed{u_n > n^2}$

Et on cherche à montrer que :

$\boxed{u_{n+1} > (n+1)^2}$ à prouver

Pour tout entier n, on a par définition :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3$$

On applique l'hypothèse de récurrence qui implique que $P(n)$ soit vérifiée et donc que $u_n > n^2$.

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2 > (n+1)^2$$

On a alors montré que $u_{n+1} > (n+1)^2$ et donc que $P(n+1)$ est vraie. La propriété est donc héréditaire.

- **Conclusion**
On a montré que $P(0)$ est vraie. De plus, la propriété est héréditaire. De ce fait la relation est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{u_n > n^2}$$

4. En déduire l'existence d'un rang p à partir duquel pour tout entier $n \geq p$ on a $u_n > 390$.

Corrigé

On a donc d'après l'inégalité précédente :

$$u_{20} > 20^2 = 400$$

Et donc puisque la suite est strictement croissante, pour tout $n \geq p = 20$ on a $u_n > 390$.

5. Compléter cet algorithme afin qu'il permette de calculer à partir de quel rang on a $u_n > 390$.

Code Python

```
def recherche() :
    '''renvoie l'indice du terme qui dépasse 390.'''
    u = 1
    n = 0
    while u <= 390 :
        n = n + 1
        u = u + 2 * (n - 1) + 3
    return n
```

Pseudo Code

```
Fonction recherche()
    u ← 1
    n ← 0
    Tant que u ≤ 390   Faire
        n ← n + 1
        u ← u + 2(n − 1) + 3
    Fin Tant que
    Renvoyer n
```

6. Résoudre l'inéquation $u_n > 390$ avec la calculatrice en expliquant brièvement le résultat.

Corrigé

$$\begin{cases} u_{18} = 361 < 390 \\ u_{19} = 400 > 390 \end{cases}$$

Donc la suite (u_n) étant croissante, si $n > 19$ alors $u_n > u_{19}$ et

$$390 < u_{19} < u_{20} < u_{21} < u_{22} < \cdots$$

soit :

$$\boxed{u_n > 390 \iff n \geq 19}$$

7. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

Corrigé

Pour n entier, on peut conjecturer que $u_n = (n+1)^2$.

8. Démontrer la propriété conjecturée.

Corrigé

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ la propriété

$$P(n)\ :\ u_n = (n+1)^2$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, la propriété $P(n)$ est vraie puisque : $u_0 = 1 = (0+1)^2$
- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$.

  Remarque

  L'hypothèse de récurrence est :

  $$(HR)\ :\ \boxed{u_n = (n+1)^2}$$

  Et on cherche à montrer que :

  $$\boxed{u_{n+1} = (n+2)^2} \text{ à prouver}$$

  Pour tout entier n, on a par définition :

  $$u_{n+1} = u_n + 2n + 3$$

  On applique l'hypothèse de récurrence qui implique que $P(n)$ soit vérifiée et donc que $u_n = (n+1)^2$.

  $$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$$

  On a alors montré que $u_{n+1} = (n+2)^2$ et donc que $P(n+1)$ est vraie. La propriété est donc héréditaire.
- **Conclusion**
  On a montré que $P(0)$ est vraie. De plus, la propriété est héréditaire. De ce fait la relation est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

  $$\boxed{u_n = (n+1)^2}$$

Exercice 3. Avec une suite arithmétique — 3.5 points

Soit (v_n) la suite définie pour n entier par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1+2v_n} \end{cases}$$

1. Calculer v_1 et v_2.

Corrigé

$$v_1 = \frac{1}{3} \text{ et } v_2 = \frac{1}{5}$$

2. On considère la suite (x_n) définie pour tout entier n par $x_n = \dfrac{1}{v_n}$.

2. a. Montrer que la suite (x_n) est arithmétique.

Corrigé

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \\ &= \frac{1+2v_n}{v_n} - \frac{1}{v_n} \\ &= \frac{1}{v_n} + 2 - \frac{1}{v_n} \\ x_{n+1} - x_n &= 2 \end{aligned}$$

Donc la suite (x_n) est arithmétique de raison 2.

2. b. En déduire que pour n entier,

$$v_n = \frac{1}{2n+1}$$

Corrigé

La suite (x_n) est arithmétique de raison 2 donc pour tout entier n on a :

$$x_n = x_0 + n \times 2 = 1 + 2n \Longrightarrow v_n = \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2n+1}$$

3. Proposer un algorithme qui permette de calculer le terme de rang N de la suite (v_n), avec $N \geq 0$.

Exercice 4. Avec une suite géométrique — 4.5 points

On considère la suite (u_n) définie pour n entier par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1 \end{cases}$$

1. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = u_n - 2n + 6$.
Calculer les 4 premiers termes des suites (u_n) et (w_n).

Corrigé

n	0	1	2	3
u_n	0	-1	-0.5	0,75
w_n	6	3	1,5	0,75

2. Montrer que (w_n) est une suite géométrique et exprimer w_n en fonction de n.

Corrigé

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - 2(n+1) + 6 \\ &= u_{n+1} - 2n + 4 \\ &= \frac{1}{2}u_n + n - 1 - 2n + 4 \\ &= \frac{1}{2}u_n - n + 3 \\ &= \frac{1}{2} \times \underbrace{(u_n - 2n + 6)}_{w_n} \\ w_{n+1} &= \frac{1}{2}w_n \end{aligned}$$

Donc la suite (w_n) est géométrique, de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = 6$. Son terme général est donc, pour tout n entier :

$$w_n = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3. En déduire que pour n entier :

$$u_n = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$$

Corrigé

Pour tout entier n on a :

$$w_n = u_n - 2n + 6 \iff u_n = w_n + 2n - 6 \iff \boxed{u_n = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6}$$

4. Pour tout entier naturel n, exprimer la somme S_n en fonction de n, où : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On écrira le résultat sous la forme $S_n = a \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + bn^2 + cn + d$.

Corrigé

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k + 2k - 6\right) \\ &= 6\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k + 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} (-6) \end{aligned}$$

or la première somme est celle des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique de raison $q = \left(\frac{1}{2}\right)$ et de premier terme 1, la seconde est celle des $(n+1)$ premiers termes de la suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme 0 (ou celle des n premiers termes de la suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme 1), et la dernière la somme de $(n+1)$ fois l'entier (-6). On obtient alors :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= 6\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k + 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}(-6) \\
&= 6\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} + \cancel{2}\times\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} + (n+1)\times(-6) \\
&= 12\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + n^2 + n - 6n - 6 \\
&= 12 - 12\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n^2 - 5n - 6 \\
S_n &= -12\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n^2 - 5n + 6
\end{aligned}$$

Pour tout entier n, en utilisant le fait que :

$$12\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 12\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = 6\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

on a :

$$\boxed{S_n = -6\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + n^2 - 5n + 6}$$

Aide

Un logiciel de calcul formel nous donne :

1	Somme$(6\cdot 0.5^k + 2\cdot k - 6, k, 0, n)$ $\rightarrow\ n^2 + n - 12\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 6n + 6$
2	\$1 Factoriser: $-12\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n^2 - 5n + 6$

Fin du devoir

Question Bonus : Difficile *

Démontrer que la suite (u_n) définie pour tout entier $n\geq 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ est croissante.