Math93.com

Devoir Surveillé n°1

TS

Suites et récurrence

Durée 2 heures - Coeff. 7

Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. Un problème de four — 4 points

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.
On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.
La température du four est exprimée en degré Celsius (° C).
La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70° C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.
Pour un nombre entier naturel n, on note T_n la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc $T_0 = 1000$.
La température T_n est calculée par l'algorithme suivant :

```
T ← 1000
Pour i allant de 1 à n
    T ← 0,82 × T + 3,6
Fin Pour
```

1. Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement.
2. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$.
3. Étudier la monotonie de la suite (T_n).
4. Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?
   Utilisez la calculatrice pour répondre à cette question en expliquant votre raisonnement.

Exercice 2. Conjecture et démonstration — 8 points

Soit (u_n) la suite définie pour n entier par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$$

1. Montrer que $u_1 = 4$ puis calculer u_2 et u_3.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
3. Démontrer que pour tout entier n on a : $u_n > n^2$.
4. En déduire l'existence d'un rang p à partir duquel pour tout entier $n \geq p$ on a $u_n > 390$.
5. Compléter cet algorithme afin qu'il permette de calculer à partir de quel rang on a $u_n > 390$.

Code Python

```
def recherche() :
    '''renvoie l'indice du terme qui dépasse 390.'''
    u = 1
    n = 0
    while ............... :
        n = ···
        u = ···
    return ···
```

Pseudo Code

```
Fonction recherche()
    u ← 1
    n ← 0
    Tant que ............... Faire
        n ← ···
        u ← ···
    Fin Tant que
    Renvoyer ···
```

6. Résoudre l'inéquation $u_n > 390$ avec la calculatrice en expliquant brièvement le résultat.
7. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
8. Démontrer la propriété conjecturée.

Exercice 3. Avec une suite arithmétique — 3.5 points

Soit (v_n) la suite définie pour n entier par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1+2v_n} \end{cases}$$

1. Calculer v_1 et v_2.

2. On considère la suite (x_n) définie pour tout entier n par $x_n = \dfrac{1}{v_n}$.

2. a. Montrer que la suite (x_n) est arithmétique.

2. b. En déduire que pour n entier,

$$v_n = \frac{1}{2n+1}$$

3. Proposer un algorithme qui permette de calculer le terme de rang N de la suite (v_n), avec $N \geq 0$.

Exercice 4. Avec une suite géométrique — 4.5 points

On considère la suite (u_n) définie pour n entier par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + n - 1 \end{cases}$$

1. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = u_n - 2n + 6$.
Calculer les 4 premiers termes des suites (u_n) et (w_n).

2. Montrer que (w_n) est une suite géométrique et exprimer w_n en fonction de n.

3. En déduire que pour n entier :

$$u_n = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$$

4. Pour tout entier naturel n, exprimer la somme S_n en fonction de n, où : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On écrira le résultat sous la forme $S_n = a \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + bn^2 + cn + d$.

Aide

Un logiciel de calcul formel nous donne :

1	Somme$(6 \cdot 0.5^k + 2 \cdot k - 6, k, 0, n)$ $\rightarrow\ n^2 + n - 12 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 6n + 6$
2	\$1 Factoriser: $-12 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n^2 - 5n + 6$

Fin du devoir

Question Bonus : Difficile *

Démontrer que la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ est croissante.