



Math93.com

Devoir Surveillé n°3

TS

Suites et complexes

Durée 2 heures - Coeff. 10

Noté sur 20 points

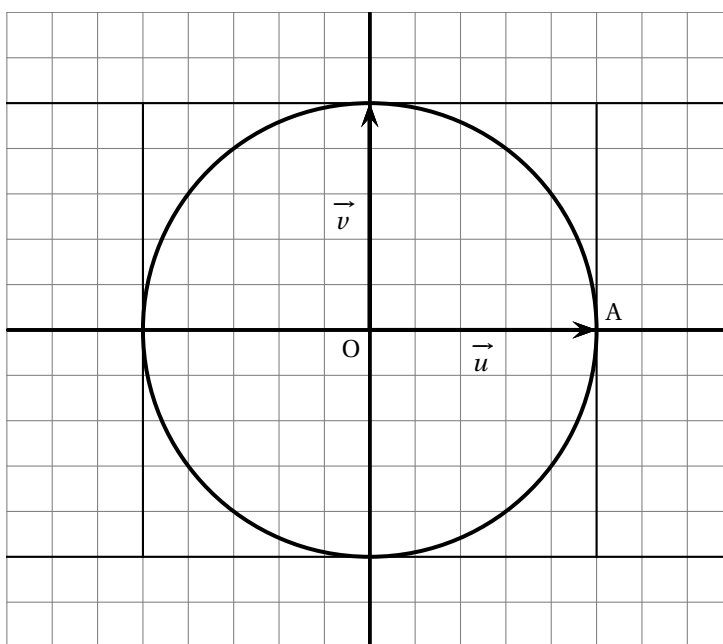
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Nom :	
BARÈME (sur 20 points)	Note
Exercice 1 : 1 point	
Exercice 2 : 9.5 points	
Exercice 3 : 9.5 points	
Total	

Annexe de l'exercice 2 (à rendre avec la copie)

$P \leftarrow 0$
 $U \leftarrow \dots\dots$
 Tant que ...
 $P \leftarrow \dots\dots$
 $U \leftarrow \dots\dots$
 Fin Tant que

Annexe de l'exercice 3 (à rendre avec la copie)



Exercice 1. ROC**1 point**

Démontrer l'une des affirmations de théorème suivant :

Théorème 1 (Suite croissante et non majorée : ROC)

1. Toute suite **croissante et non majorée** diverge vers $+\infty$.
2. Toute suite **décroissante et non minorée** diverge vers $-\infty$.

Exercice 2. De l'importance du premier terme**9.5 points**On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}.$$

Soit a un réel positif.On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, suivant différentes valeurs de son premier terme $u_0 = a$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, pour $a = 2,9$ puis pour $a = 3,1$.
2. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ .

2. a. En remarquant que

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{3}{2}$$

montrer que :

$$\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$$

2. b. Montrer que les valeurs possibles de ℓ sont 1 et 3.
3. Dans cette question, on prend $a = 2,9$.
 3. a. Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
 3. b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n$$
 3. c. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Dans cette question, on prend $a = 3,1$ et on admet que la suite (u_n) est croissante.
 4. a. À l'aide des questions précédentes montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
 4. b. En déduire le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
 4. c. L'algorithme présenté en annexe calcule le plus petit rang p pour lequel $u_p > 10^6$. Compléter cet algorithme.
 P est un nombre entier et U est un nombre réel.

Exercice 3. Points alignés**9.5 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Le but de cet exercice est de déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les points d'affixes $1, z^2$ et $\frac{1}{z}$ soient alignés.

Sur le graphique fourni en annexe, le point A a pour affixe 1.

Partie A : étude d'exemples**1. Un premier exemple**

Dans cette question, on pose $z = i$.

1. a. Donner la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$.

1. b. Placer les points N_1 d'affixe z^2 , et P_1 d'affixe $\frac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.

On remarque que dans ce cas les points A, N_1 et P_1 ne sont pas alignés.

2. Une équation

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2 + z + 1 = 0$.

3. Un deuxième exemple

Dans cette question, on pose : $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. a. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$.

3. b. Placer les points N_2 d'affixe z^2 et P_2 , d'affixe $\frac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.

On remarque que dans, ce cas les points A, N_2 et P_2 sont alignés.

Partie B

Soit z un nombre complexe non nul.

On note N le point d'affixe z^2 et P le point d'affixe $\frac{1}{z}$.

1. Établir que, pour tout nombre complexe différent de 0, on a :

$$z^2 - \frac{1}{z} = (z^2 + z + 1) \left(1 - \frac{1}{z}\right).$$

2. On rappelle que si, \vec{U} est un vecteur non nul et \vec{V} un vecteur d'affixes respectives $z_{\vec{U}}$ et $z_{\vec{V}}$, les vecteurs \vec{U} et \vec{V} sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $z_{\vec{V}} = kz_{\vec{U}}$.

En déduire que, pour $z \neq 0$, les points A, N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.

3. On pose $z = x + iy$, où x et y désignent des nombres réels.

Justifier que :

$$z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$$

4.

4. a. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que les points A, N et P soient alignés.

4. b. Tracer cet ensemble de points sur le graphique donné en annexe.

∞ Fin du devoir ∞