Math93.com

Devoir Surveillé n°3
Correction

TS

Fonctions et continuité

Durée 2 heures - Coeff. 10

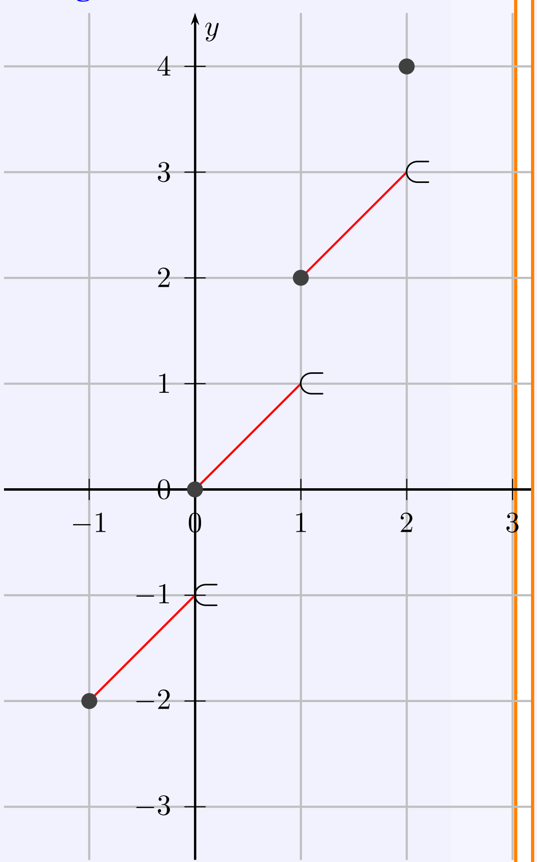
Noté sur 20 points

ANNEXES à rendre avec la copie

A compléter sur cette feuille

ANNEXE 1 de l'exercice 2.

Corrigé



A compléter sur cette feuille

ANNEXE 2 de l'exercice 4.

L'algorithme permet d'obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}, où α est la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a\ ;\ b]$ (à préciser).

Pseudo Code

 # $[a\ ;\ b]$ un intervalle de départ qui contient la solution α avec $a < b$.

$a \leftarrow -10$
$b \leftarrow 10$
Tant que $(b - a > 0,01)$ Faire
  $m \longleftarrow \dfrac{a+b}{2}$
  Si $f(a) \times f(m) < 0$ Alors
    $b \longleftarrow m$
  Sinon
    $a \longleftarrow m$
Fin Tant que
Afficher $(a\ ,\ b)$

Exercice 1. Quelques réminiscences 2.5 points

On considère le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé directe $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z différente de 3 associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z+1}{z-3}$.

On considère les points A, B et C d'affixe respectives (-1), 3 et $(1+2\,i\,)$.

1. Déterminer l'ensemble F des points M du plan $\mathcal{P}$ d'affixes z tels que $|z'| = 1$.

Corrigé

Pour $z \neq 3$ on a :

$$\left|z'\right| = 1 \iff \left|\frac{z+1}{z-3}\right| = 1 \iff |z+1| = |z-3|$$

Or si $z_A = -1$ désigne l'affixe du point A et $z_B = 3$ désigne l'affixe du point B on a :

$$\left|z'\right| = 1 \iff |z-(-1)| = |z-3| \iff MA = MB$$

L'ensemble F est donc la médiatrice du segment [AB].

2. Déterminer l'ensemble G des points M du plan $\mathcal{P}$ d'affixes z tels que z' soit réel.

Corrigé

- Méthode 1 Pour $z \neq 3$ on a en posant $z = x + i\,y$:

$$\begin{aligned} z' = x' + i\,y' &= \frac{z+1}{z-3} \\ &= \frac{(x+i\,y)+1}{(x+i\,y)-3} \\ &= \frac{(x+1+i\,y)(x-3-i\,y)}{(x-3+i\,y)(x-3-i\,y)} \\ z' = x' + i\,y' &= \frac{(x^2-2x-3+y^2)-4\,i\,y}{(x-3)^2+y^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x^2-2x-3+y^2}{(x-3)^2+y^2} \\ y' = \dfrac{-4y}{(x-3)^2+y^2} \end{cases}$$

De ce fait, z' est réel pour $y = 0$ avec toujours $z \neq 3$. L'ensemble G est donc l'axe des abscisses privé du point B (puisque z différent de 3).

- Méthode 2 :

$$\begin{aligned} z' \in \mathbb{R} &\iff \frac{z+1}{z-3} = k \in \mathbb{R},\ \text{avec } k \in \mathbb{R},\ \text{et } z \neq 3 \\ &\iff z+1 = k(z-3),\ \text{avec } k \in \mathbb{R},\ \text{et } z \neq 3 \\ &\iff z - z_A = k(z - z_B),\ \text{avec } k \in \mathbb{R},\ \text{et } z \neq 3 \\ &\iff z_{\overrightarrow{AM}} = k z_{\overrightarrow{BM}},\ \text{avec } k \in \mathbb{R},\ \text{et } M \neq B(3) \\ &\iff \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BM},\ \text{avec } k \in \mathbb{R},\ \text{et } M \neq B(3) \end{aligned}$$

L'ensemble G est donc l'axe des abscisses privé du point B.

Exercice 2. Avec la fonction partie entière 3 points

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x, c'est à dire l'unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$.

Soit f la fonction définie sur $[-1\ ;\ 2]$ par :

$$f(x) = x + \lfloor x \rfloor$$

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x suivant les valeurs du réel x de $[-1\ ;\ 2]$.

Corrigé

- Pour x de $[-1\ ;\ 0[$ on a $\lfloor x \rfloor = -1$ et donc $f(x) = x - 1$.
- Pour x de $[0\ ;\ 1[$ on a $\lfloor x \rfloor = 0$ et donc $f(x) = x$.
- Pour x de $[1\ ;\ 2[$ on a $\lfloor x \rfloor = 1$ et donc $f(x) = x + 1$.
- Pour $x = 2$ on a $\lfloor 2 \rfloor = 2$ et donc $f(2) = 2 + 2 = 4$.

2. Construire la représentation graphique de f dans le repère de l'ANNEXE 1 et sans autre justification. Attention au codage !

3. f est-elle continue sur $[0\ ;\ 1[$? sur $[1\ ;\ 2]$? Justifier la réponse graphiquement.

Corrigé

- Sur $[1\ ;\ 2]$.
  La fonction f est définie par une fonction affine sur $[1\ ;\ 2[$ donc elle y est continue. Le problème se pose en 2. L'image de 2 par f est 4 or quand x tend vers 2 par valeurs inférieures, f tend vers 3, il y a discontinuité. La courbe représentative présente bien un saut en 2 donc la fonction n'est pas continue sur $[1\ ;\ 2]$.
- Par contre elle est continue sur $[0\ ;\ 1[$ car sur cet intervalle la fonction s'exprime sous la forme d'une fonction affine, la courbe n'y présente pas de saut.

Exercice 3. Vrai ou Faux 4 points

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier avec soin votre raisonnement. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1

Soit g une fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ telle que :

- la fonction g est dérivable et strictement décroissante sur $[0\ ;\ 1]$;
- On a : $g(0) = 5$ et $g(1) = 2$.

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = \Big(g(x)\Big)^2$$

Alors l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution sur $[0\ ;\ 1]$.

Corrigé

- f dérivable sur $[0\ ;\ 1]$.
  La fonction g est définie et dérivable sur $[0\ ;\ 1]$ donc f l'est aussi d'après le cours car de la forme g^2. Pour x de $[0\ ;\ 1]$ on a :
  $$f'(x) = 2g(x) \times g'(x)$$

- g positive sur $[0\ ;\ 1]$.
  La fonction g est strictement décroissante sur $[0\ ;\ 1]$ (et continue car dérivable) donc elle admet comme minimum $g(1) = 2$ et on obtient :

x	0	1
Signe de $g'(x)$	$-$	
Variations de g	5 ↘	2

  De ce fait g est strictement positive sur $[0\ ;\ 1]$ et donc f' est du signe de g'.

- Variations de f sur $[0\ ;\ 1]$.
  Puisque g est décroissante, g' est strictement négative ce qui nous donne le signe de f' et donc les variations de f qui est aussi décroissante sur $[0\ ;\ 1]$:

x	0	1
Signe de $f'(x) = 2g(x) \times g'(x)$	$-$	
Variations de f	$f(0) = g(0)^2 = 25$ ↘	$f(1) = g(1)^2 = 4$

- f continue sur $[0\ ;\ 1]$.
  Pour appliquer le TVI, il reste à montrer que f est continue. Cela est acquis car on a montré que f était dérivable sur $[0\ ;\ 1]$.

- On peut appliquer le corolaire du TVI :
  - Sur $[0\ ;\ 1]$ f est continue.
  - le réel $k = 6$ est compris entre $f(0) = g(0)^2 = 25$ et $f(1) = g(1)^2 = 4$.
  - Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution sur $[0\ ;\ 1]$.

- **Conclusion : l'affirmation 1 est vraie.**

Affirmation 2

Soit m un réel et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = -x^2 + m & \text{si } x \leqslant 3 \\ h(x) = -2x - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La fonction h n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, quelle que soit la valeur de m.

Corrigé

- Sur l' intervalles $]-\infty\ ;\ 3]$ la fonction h est continue car c'est une fonction polynôme du second degré. Sur l' intervalles $]3\ ;\ +\infty[$ la fonction h est continue car c'est une fonction affine. Le problème se pose donc en 3.
- On a $h(3) = -3^2 + m = m - 9$.
- Par ailleurs, si x tend vers 3 en étant supérieur à 3, $h(x)$ tend vers $-2 \times 3 - 1 = -7$.
- En prenant $m = 2$ on aura donc la continuité en 3 et la fonction, sera continue sur $\mathbb{R}$.
- **<u>Conclusion</u> : l'affirmation 2 est fausse.**

Exercice 4. Une étude de fonction 10.5 points

Partie A : une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + 3x + 8$$

1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

La fonction g est une fonction polynôme donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$g'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$$

Pour tout réel x de $\mathbb{R}$ on a trivialement $3(x^2 + 1) > 0$ et donc g' est strictement positive et g strictement croissante sur cet intervalle.

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

x	$-\infty$	-2	α	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$			$+$		
Variations de g		-6	0	8	

- Sur $]-\infty\,;\,-2]$: g est strictement croissante et de maximum $g(-2) = -6$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'y admet pas de solution.
- Sur $]0\,;\,+\infty[$: g est strictement croissante et de maximum $g(0) = 8$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'y admet pas de solution.
- Sur $[-2\,;\,0]$:
  - g est strictement croissante et continue (car dérivable) ;
  - le réel $k = 0$ est compris entre $g(-2) = -6$ et $g(0) = 8$ donc l'équation $g(x) = 0$;
  - Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ y admet une unique solution α.
- Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et $-2 < \alpha < 0$.

3. Compléter l'algorithme de dichotomie donné en ANNEXE 2 qui permet d'obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}. On partira d'un intervalle $[a\,;\,b]$ contenant α, avec a et b entier.

4. En le justifiant avec soin, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Corrigé

$$\begin{cases} g(-1,52) \approx -0,075 < 0 \\ g(-1,51) \approx 0,027 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{-1,52 < \alpha < -1,51}$$

5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Corrigé

d'après le tableau de variation de la question A.2. on obtient :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B : étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$$

1. Démontrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Pour tout réel x de $\mathbb{R}$ on a :

$$x^2 \geqslant 0 \Longrightarrow x^2 + 1 > 0 \Longrightarrow x^2 + 1 \neq 0$$

De ce fait, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer la dérivée de f et vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

Corrigé

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x de $\mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = \frac{3x^2 \times (x^2+1) - (x^3 - 4) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 + 8x}{(x^2+1)^2} = \frac{x.g(x)}{(x^2+1)^2}$$

3. Étudier les variations de f. *On pourra utiliser les résultats de la partie A.*

Corrigé

Sur $\mathbb{R}$ le dénominateur $(x^2+1)^2)$ est strictement positif donc g' est du signe de $xg(x)$.

D'après l'étude menée dans la partie A on obtient alors :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $xg(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Soit

x	$-\infty$		$-1.52 < \alpha < -1.51$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	

4. Démontrer que :

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{3}{2}$$

Corrigé

Puisque $g(\alpha)=0$ on a :

$$\alpha^3=-3\alpha-8$$

De ce fait on remplaçant dans $f(\alpha)$ on a :

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{\alpha^3-4}{\alpha^3+\alpha}=\frac{-3\alpha-8-4}{-3\alpha-8+\alpha}=\frac{-3\alpha-12}{-2\alpha-8}=\frac{-3(\alpha+4)}{-2(\alpha+4)}=\frac{3}{2}$$

5. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

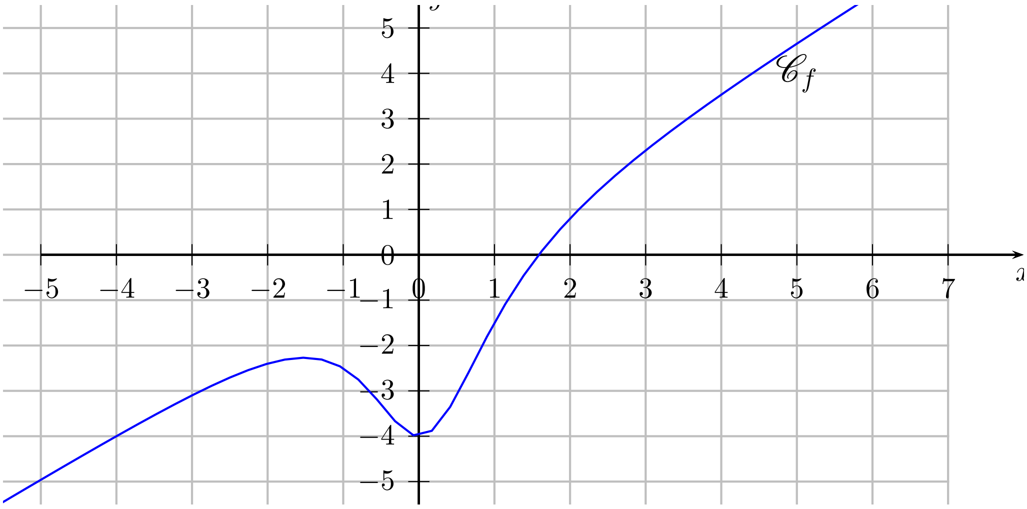
Corrigé

Donc puisque d'après la partie A on a et la question précédente :

$$\begin{cases} f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha \\ -1,52<\alpha<-1,51 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{-2,280<f(\alpha)<-2,265}$$

Partie C : un problème de tangente

On donne ici $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.



1. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Corrigé

L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = 0$ est

$$(T)\ :\ y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} f(0) & = -4 \\ f'(0) & = 0 \end{array}\right| \Rightarrow\ (T)\ :\ y = 0 \times (x-0)\ -4 \implies \boxed{y = -4}$$

2. Conjecturer graphiquement la position relative de (T) par rapport à $\mathscr{C}_f$.
Valider votre conjecture par le calcul.

Corrigé

Pour étudier la position de la tangente par rapport à $\mathscr{C}_f$ il faut étudier le signe de la différence :

$$\begin{aligned} f(x) - (-4) &= \frac{x^3-4}{x^2+1} + 4 \\ &= \frac{x^3 - 4 + 4x^2 + 4}{x^2+1} \\ &= \frac{x^3+4x^2}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2(x+4)}{x^2+1} \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}$ le dénominateur (x^2+1) est strictement positif et x^2 est positif et nul en 0. Donc la différence est du signe du facteur $(x+4)$ et :

- Or :

$$\begin{cases} x+4=0 \iff x=-4 \\ x-4>0 \iff x>4 \end{cases} \implies x+4<0 \iff x<-4$$

Donc :

- Si $x<-4$, alors $f(x)-(-4)<0$ et $\mathscr{C}_f$ au dessous de T ;
- Si $x \geqslant -4$, alors $f(x)-(-4) \geqslant 0$ et $\mathscr{C}_f$ au dessus de T ;
- La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe T en deux points d'abscisses (-4) et 0.

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
signe de $f(x)-(-4)=\dfrac{x^2(x+4)}{x^2+1}$		$-$	0	$+$	0	$+$	
Position		$\mathscr{C}_f$ au dessous de (T)		$\mathscr{C}_f$ au dessus de (T)		$\mathscr{C}_f$ au dessus de (T)	

Fin du devoir