



Math93.com

# Devoir Surveillé n°3

## TS

### Fonctions et continuité

Durée 2 heures - Coeff. 10

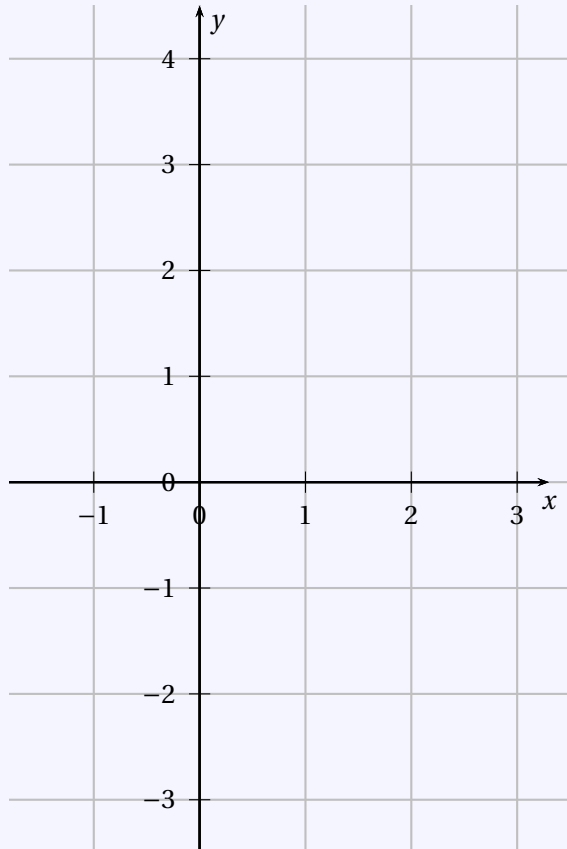
Noté sur 20 points

BARÈME (sur 20 points)	Note
Exercice 1 : 2.5 points	
Exercice 2 : 3 points	
Exercice 3 : 4 points	
Exercice 4 : 10.5 points	
<b>Total</b>	

## ANNEXES à rendre avec la copie

A compléter sur cette feuille

ANNEXE 1 de l'exercice 2.



A compléter sur cette feuille

ANNEXE 2 de l'exercice 4.

L'algorithme permet d'obtenir un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ , où  $\alpha$  est la solution de l'équation  $f(x) = 0$  sur  $[a; b]$  (à préciser).

### Pseudo Code

*# [a; b] un intervalle de départ qui contient la solution  $\alpha$  avec  $a < b$ .*

$a \leftarrow \dots$

$b \leftarrow \dots$

Tant que  $(b - a > \dots\dots\dots)$  Faire

$m \leftarrow \dots$

Si  $f(a) \times f(m) < 0$  Alors

$\dots \leftarrow \dots$

Sinon

$\dots \leftarrow \dots$

Fin Tant que

Afficher  $(a, b)$

**Exercice 1. Quelques réminiscences****2.5 points**

On considère le plan complexe  $\mathcal{P}$  rapporté à un repère orthonormé directe  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $f$  l'application du plan qui à tout point M d'affixe  $z$  différente de 3 associe le point M' d'affixe  $z' = \frac{z+1}{z-3}$ .

On considère les points A, B et C d'affixe respectives  $(-1)$ ,  $3$  et  $(1+2i)$ .

- Déterminer l'ensemble F des points M du plan  $\mathcal{P}$  d'affixes  $z$  tels que  $|z'| = 1$ .
- Déterminer l'ensemble G des points M du plan  $\mathcal{P}$  d'affixes  $z$  tels que  $z'$  soit réel.

**Exercice 2. Avec la fonction partie entière****3 points**

On note  $\lfloor x \rfloor$  la partie entière d'un réel  $x$ , c'est à dire l'unique entier relatif  $n$  tel que  $n \leq x < n+1$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-1 ; 2]$  par :

$$f(x) = x + \lfloor x \rfloor$$

- Exprimer  $f(x)$  en fonction de  $x$  suivant les valeurs du réel  $x$  de  $[-1 ; 2]$ .
- Construire la représentation graphique de  $f$  dans le repère de l'ANNEXE 1 et sans autre justification. Attention au codage!
- $f$  est-elle continue sur  $[0 ; 1]$ ? sur  $[1 ; 2]$ ? Justifier la réponse graphiquement.

**Exercice 3. Vrai ou Faux****4 points**

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier avec soin votre raisonnement. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

**Affirmation 1**

Soit  $g$  une fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  telle que :

- la fonction  $g$  est dérivable et strictement décroissante sur  $[0 ; 1]$ ;
- On a :  $g(0) = 5$  et  $g(1) = 2$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; 1]$  par :

$$f(x) = (g(x))^2$$

Alors l'équation  $f(x) = 6$  admet une unique solution sur  $[0 ; 1]$ .

**Affirmation 2**

Soit  $m$  un réel et  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} h(x) = -x^2 + m & \text{si } x \leq 3 \\ h(x) = -2x - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La fonction  $h$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$ , quelle que soit la valeur de  $m$ .

**Exercice 4. Une étude de fonction****10.5 points****Partie A : une fonction auxiliaire**Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = x^3 + 3x + 8$$

1. Étudier les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Compléter l'algorithme de dichotomie donné en ANNEXE 2 qui permet d'obtenir un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ . On partira d'un intervalle  $[a ; b]$  contenant  $\alpha$ , avec  $a$  et  $b$  entier.
4. En le justifiant avec soin, donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .
5. Déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

**Partie B : étude de la fonction  $f$** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$$

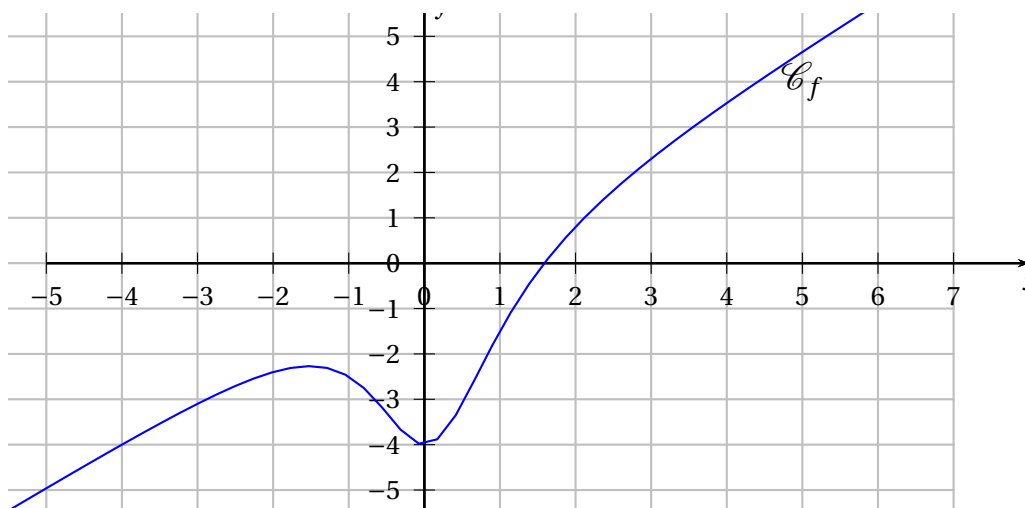
1. Démontrer que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .
2. Calculer la dérivée de  $f$  et vérifier que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

3. Étudier les variations de  $f$ . On pourra utiliser les résultats de la partie A.
4. Démontrer que :

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{3}{2}$$

5. En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$ .

**Partie C : un problème de tangente**On donne ici  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.
2. Conjecturer graphiquement la position relative de (T) par rapport à  $\mathcal{C}_f$ .  
Valider votre conjecture par le calcul.

🌀 Fin du devoir 🌀