Math93.com

Devoir Surveillé n°B1
Correction

TS
Fonctions exponentielles et trigonométriques
Durée 2 heures - Coeff. 10
Noté sur 20 points

Exercice 1. Quelques réminiscences — 1.5 points

On considère le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé directe $\left(\mathrm{O},\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$.
Soit f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z différente de (-1) associe le point M' d'affixe

$$z'=\frac{z-3}{z+1}$$

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points du plan $\mathcal{P}$ invariants par f, c'est à dire des points M du plan tels que $f(M)=M$.

Corrigé

Pour $z\neq -1$ on a :

$$\begin{aligned} f(M)=M &\iff z'=z=\frac{z-3}{z+1}\\ &\iff z(z+1)=z-3\\ &\iff z^2+z-z+3=0\\ &\iff z^2=-3=(\mathrm{i}\sqrt{3})^2\end{aligned}$$

L'équation a deux solutions complexes conjuguées qui sont :

$$z_1=\mathrm{i}\sqrt{3}\ \text{ et }\ z_2=-\mathrm{i}\sqrt{3}$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc constitué des points A et B d'affixes respectives $z_1=\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2=-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Exercice 2. Les suites c'est ma passion ! — 2.75 points

Soit (a_n) la suite arithmétique de raison r et de premier terme $a_0=1$.
Pour tout entier n on pose :

$$b_n=\mathrm{e}^{-a_n}$$

1. Démontrer que (b_n) est une suite géométrique et donner sa raison.

Corrigé

Puisque la suite (a_n) la suite arithmétique de raison r et de premier terme $a_0=1$, pour tout entier n : $a_{n+1}=a_n+r$.

Pour tout entier n on a :

$$b_{n+1}=\mathrm{e}^{-a_{n+1}}=\mathrm{e}^{-a_n-r}=\mathrm{e}^{-a_n}\,\mathrm{e}^{-r}=\mathrm{e}^{-r}b_n$$

Donc la suite (b_n) est une suite géométrique de raison $q = \mathrm{e}^{-r}$

2. En déduire son terme général en fonction de r.

Corrigé

Puisque la suite (b_n) est une suite géométrique de raison $q = \mathrm{e}^{-r}$, pour tout entier n :

$$b_n = b_0 \times q^n = \mathrm{e}^{-a_0}\,\mathrm{e}^{-nr} = \mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{e}^{-nr}$$

3. Discuter selon les valeurs de r, de la limite de la suite (b_n).

Corrigé

- Notons tout d'abord que pour tout entier n, on a :

$$b_n = \mathrm{e}^{-1} \times \left(\mathrm{e}^{-r}\right)^n$$

- Étudions la limite de la suite de terme général

$$q^n = \left(\mathrm{e}^{-r}\right)^n$$

- Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on a $q = \left(\mathrm{e}^{-r}\right) > 0$.
- Par ailleurs, puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} q = \left(\mathrm{e}^{-r}\right) > 1 \iff \mathrm{e}^{-r} > 1 = \mathrm{e}^{0} \iff -r > 0 \iff r < 0 \\ q = \left(\mathrm{e}^{-r}\right) = 1 \iff \mathrm{e}^{-r} = 1 \iff r = 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} q = \left(\mathrm{e}^{-r}\right) = 1 \iff r = 0 \\ q = \left(\mathrm{e}^{-r}\right) > 1 \iff r < 0 \end{cases} \Longrightarrow 0 < q < 1 \iff r > 0$$

- On applique le théorème :

Théorème 1 (Limite d'une suite géométrique de terme général (q^n))

Soit q un nombre réel :

- Si $-1 < q < 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n converge vers 0 :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

- Si $q > 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n a pour limite $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$$

- Si $q < -1$ alors la suite géométrique de terme général q^n n'admet pas de limite finie ou infinie.

- Par conséquent par opérations sur les limites :

- Si $r > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{-r}\right)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-r}\right)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$$

- Si $r = 0$,

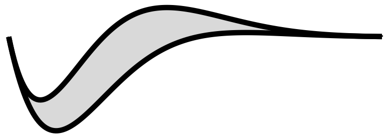
$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \mathrm{e}^{-1}$$

- Si $r < 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{-r}\right)^n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-r}\right)^n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$$

Exercice 3. Une histoire de Logo 7 points

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \text{ et } g(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A - Étude de la fonction f

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}.$$

Corrigé

Pour tout réel x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -1 \leqslant -\cos x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \end{cases} \Longrightarrow -2 \leqslant (-\cos x + \sin x) \leqslant 2 \Longrightarrow -1 \leqslant (-\cos x + \sin x + 1) \leqslant 3$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc

$$-\mathrm{e}^{-x} \leqslant \underbrace{\mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1)}_{f(x)} \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}}$$

2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f.

Corrigé

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \mathrm{e}^{-x} \times (-\cos x + \sin x + 1) \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R} ;\ f(x) = u(x) \times v(x) \ : \ \begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{-x} & ; \ u'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \\ v(x) = (-\cos x + \sin x + 1) & ; \ v'(x) = (\sin x + \cos x) \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) &= u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x)\\
f'(x) &= -\,\mathrm{e}^{-x} \times (-\cos x + \sin x + 1) + \mathrm{e}^{-x} \times (\sin x + \cos x)\\
f'(x) &= \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x - 1 + \sin x + \cos x)
\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 1)}$$

3. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

3. a. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

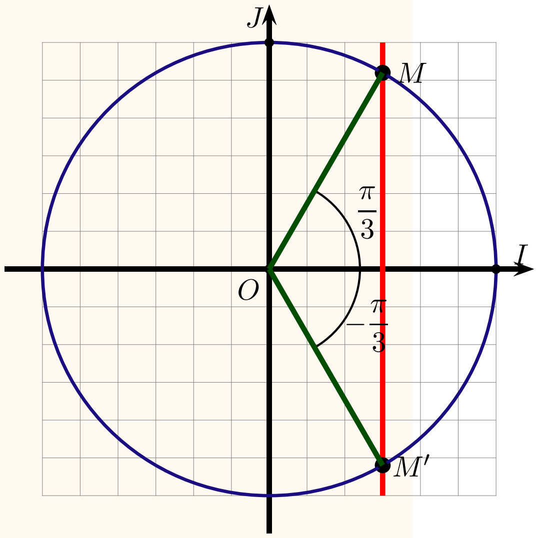
Corrigé

Sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ on a :

$$2\cos x - 1 \geqslant 0 \iff \cos x \geqslant \frac{1}{2} \iff \left[-\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{3}\right]$$

Par ailleurs l'exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, le facteur $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et on obtient :

$$\begin{cases}
f'(x) > 0 \iff x \in \left]-\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{3}\right[\\[2ex]
f'(x) < 0 \iff x \in \left[-\pi\ ;\ -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}\ ;\ \pi\right]\\[2ex]
f'(x) = 0 \iff x = -\frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3}
\end{cases}$$



3. b. En déduire les variations de f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$. On détaillera le calcul des valeurs exactes dans le tableau de variations puis on donnera des valeurs approchées au centième.

Corrigé

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos(x) + \sin(x) + 1)$$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	$2\,\mathrm{e}^{\pi} \approx 46.28$	↘	$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	↗	$f\left(\frac{\pi}{3}\right)$	↘	$2\,\mathrm{e}^{-\pi} \approx 0.09$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}\left(-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 1\right) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}(1 - \sqrt{3}) \approx -1,04$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1\right) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}(1 + \sqrt{3}) \approx 0,48$$

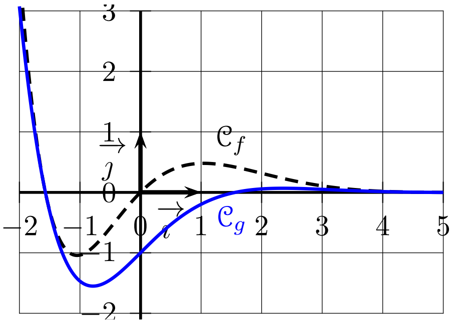
$$f(-\pi) = 2\,\mathrm{e}^{\pi} \quad \text{et} \quad f(\pi) = 2\,\mathrm{e}^{-\pi}$$

Partie B - Aire du logo

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -\,\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

L'unité graphique est de 1 centimètres. Ces deux courbes sont tracées ci-dessous.



1. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Pour tout réel x de $\mathbb{R}$ on a :

$$f(x) - g(x) = \mathrm{e}^{-x}(\sin x + 1)$$

Or pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ donc :

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{-x} > 0 \\ (\sin x + 1) \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow f(x) - g(x) = \mathrm{e}^{-x}(\sin x + 1) \geqslant 0$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque

Cela suffit pour cette question, on pourrait être plus précis et préciser les abscisses des points d'intersections des deux courbes. Donc ce cas on doit résoudre l'équation :

$$f(x) - g(x) = 0 \iff \sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-x}$.. On admet que l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est donné, en unités d'aire par : $\mathscr{A} = H\left(\frac{3\pi}{2}\right) - H\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ u.a.

Corrigé

$$\mathscr{A} = \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\pi/2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\pi/2}\right) \times 1\ \mathrm{cm}^2 \approx 2,4\ \mathrm{cm}^2$$

Exercice 4. Une aire maximale 8.75 points

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g.

Corrigé

La fonction g somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur $[0\,;\,+\infty[$:

$$g'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x \Longrightarrow \boxed{g'(x) = -x\mathrm{e}^x}$$

Comme $\mathrm{e}^x > 0$ et $x > 0$, on a $g'(x) < 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

g est donc décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Donner le tableau de variations de g.

Corrigé

x	0	$+\infty$
Variations de g	2	$\searrow$

3.

3. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\,;\,+\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

Corrigé

x	0	α	2	$+\infty$
Variations de g	2	0	$1 - \mathrm{e}^2 \approx -6.4$	$\searrow$

- Sur $[2\,;\,+\infty[$
  La fonction g est strictement décroissante et de maximum $g(2) < 0$. Donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.
- Application du corollaire sur $[0\,;\,2]$:
  - La fonction g est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[0\,;\,2]$;
  - Le réel $k = 0$ est compris entre $g(0) = 2$ et $g(2) = 1 - \mathrm{e}^2 \approx -6.4$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
    l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.
- Bilan : sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution α. Cette solution appartient à l'intervalle $]0\,;\,2[$.

3. b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

Corrigé

Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

- Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcr} g\,(1,27) & \approx & 0,04 < 0 \\ g\,(1,28) & \approx & -0,007 > 0 \end{array}\right| \text{, donc } \boxed{1,27 \ < \alpha < 1,28}.$$

3. c. Démontrer que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

Corrigé

On a :

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\iff \mathrm{e}^{\alpha} - \alpha\mathrm{e}^{\alpha} + 1 = 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{\alpha}(1-\alpha) = -1 \\ &\iff \mathrm{e}^{\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} \end{aligned}$$

4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Corrigé

On a donc $g(x) > 0$ sur $[0\,;\,\alpha[$; $g(\alpha) = 0$ et $g(x) < 0$ sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.

Corrigé

La fonction A quotient de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ et le dénominateur ne s'annulant pas, elle est dérivable et sur cet intervalle :

$$A'(x) = \frac{4\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - 4x \times \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2} = \frac{4\left(\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1\right)}{\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2} = \frac{4g(x)}{\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2}$$

Comme $\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2 > 0$ quel que soit x, le signe de $A'(x)$ est celui de $g(x)$.

D'après la précédente question on a donc :

$A'(x) > 0$ sur $[0\,;\,\alpha[$; $A'(\alpha) = 0$ et $A' < 0$ sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\,;\,+\infty[$.

Corrigé

On a donc :

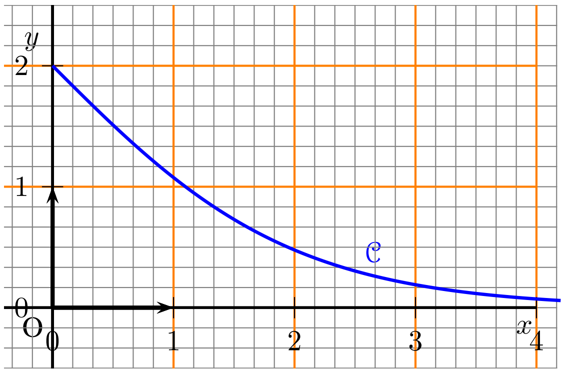
$A(x)$ est croissante sur $[0\ ;\ \alpha[$ et décroissante sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$, $A(\alpha)$ étant le maximum de la fonction.

x	0		α		$+\infty$
Signe de $A'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de A	0	$\nearrow$	$A(\alpha)$	$\searrow$	

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{e^x + 1}$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. La figure est donnée ci-après.



Pour tout réel x positif ou nul, on note :

- M le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$,
- P le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,
- Q le point de coordonnées $(0\ ;\ f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

Corrigé

On sait que $x \geqslant 0$, donc $OP = x$ et $f(x) \geqslant 0$ donc $OQ = f(x)$.
L'aire du rectangle $OPMQ$ est égale à :

$$x \times f(x) = \frac{4x}{e^x + 1} = A(x)$$

Or on a vu que la fonction présente un maximum pour $x = \alpha$. L'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

2. Déterminer la dérivée de f sur R_+ puis montrer que $f'(\alpha) = -\dfrac{4(\alpha - 1)}{\alpha^2}$.

Corrigé

On a facilement, pour tout réel x positif :

$$f'(x) = -\frac{4\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$$

On a vu que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}$, donc

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= -\frac{4\mathrm{e}^\alpha}{(\mathrm{e}^\alpha+1)^2} \\ &= -\frac{\frac{4}{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)^2} \\ &= -\frac{\frac{4}{\alpha-1}}{\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2} = \frac{4}{\alpha-1} \times \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2} \\ f'(\alpha) &= -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

3. Le point M a pour abscisse α.

La tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

Corrigé

Le coefficient directeur de la droite (PQ) est égal à

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = -\frac{f(\alpha)}{\alpha} = -\frac{\frac{4}{\mathrm{e}^\alpha+1}}{\alpha} = -\frac{4}{\alpha\,(\mathrm{e}^\alpha+1)}$$

Or on a vu que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}$, donc le coefficient directeur de (PQ) est égal à :

$$-\frac{4}{\alpha\,(\mathrm{e}^\alpha+1)} = -\frac{4}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)} = -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha(1+\alpha-1)} = -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$$

La tangente en $M(\alpha\ ;\ f(\alpha))$ a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$.
Or

$$f'(\alpha) = -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}.$$

Les coefficients directeurs sont égaux : les droites sont parallèles.

Fin du devoir