Math93.com

Devoir Surveillé n°B1

TS

Fonctions exponentielles et trigonométriques

Durée 2 heures - Coeff. 10

Noté sur 20 points

BARÈME (sur 20 points)				Note
Exercice 1	:	1.5	points	
Exercice 2	:	2.75	points	
Exercice 3	:	7	points	
Exercice 4	:	8.75	points	
			Total	

Exercice 1. Quelques réminiscences — 1.5 points

On considère le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé directe $\left(\text{O},\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$.
Soit f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z différente de (-1) associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{z-3}{z+1}$$

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points du plan $\mathcal{P}$ invariants par f, c'est à dire des points M du plan tels que $f(M) = M$.

Exercice 2. Les suites c'est ma passion ! — 2.75 points

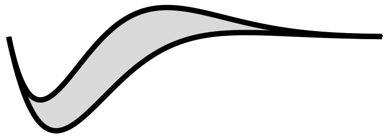
Soit (a_n) la suite arithmétique de raison r et de premier terme $a_0 = 1$.
Pour tout entier n on pose :

$$b_n = \mathrm{e}^{-a_n}$$

1. Démontrer que (b_n) est une suite géométrique et donner sa raison.
2. En déduire son terme général en fonction de r.
3. Discuter selon les valeurs de r, de la limite de la suite (b_n).

Exercice 3. Une histoire de Logo — 7 points

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \text{ et } g(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A - Étude de la fonction f

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\,\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f.

3. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

3. a. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

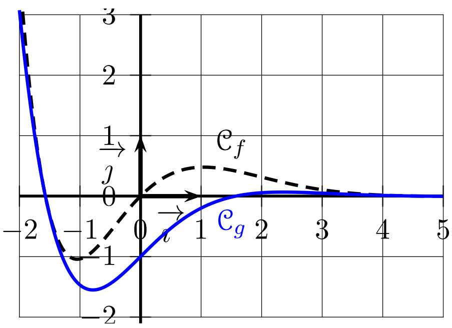
3. b. En déduire les variations de f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$. On détaillera le calcul des valeurs exactes dans le tableau de variations puis on donnera des valeurs approchées au centième.

Partie B - Aire du logo

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \text{ et } g(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

L'unité graphique est de 1 centimètres. Ces deux courbes sont tracées ci-dessous.



1. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_g$ est les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.
On admet que l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est donné, en unités d'aire par :

$$\mathscr{A} = H\left(\frac{3\pi}{2}\right) - H\left(-\frac{\pi}{2}\right) \text{ u.a.}$$

Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm².

Exercice 4. Une aire maximale — 8.75 points

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g.

2. Donner le tableau de variations de g.

3.

3. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

3. b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. c. Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

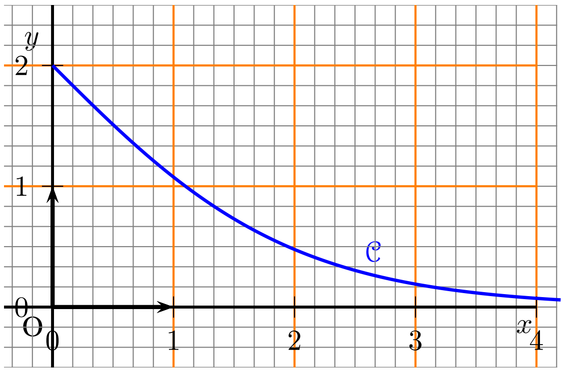
1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.

2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. La figure est donnée ci-après.



Pour tout réel x positif ou nul, on note :

- M le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$,
- P le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,
- Q le point de coordonnées $(0\ ;\ f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α. On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.

2. Déterminer la dérivée de f sur R_+ puis montrer que $f'(\alpha) = -\dfrac{4(\alpha - 1)}{\alpha^2}$.

3. Le point M a pour abscisse α.

La tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

Fin du devoir