Math93.com

Devoir Surveillé n°B2
Correction

TS
Probabilités conditionnelles et loi binomiale
Durée 1,25 heure - Coeff. 6
Noté sur 20 points

BARÈME (sur 20 points)				Note
Exercice 1	:	10.75	points	
Exercice 2	:	9.25	points	
			Total	

Exercice 1. 10.75 points

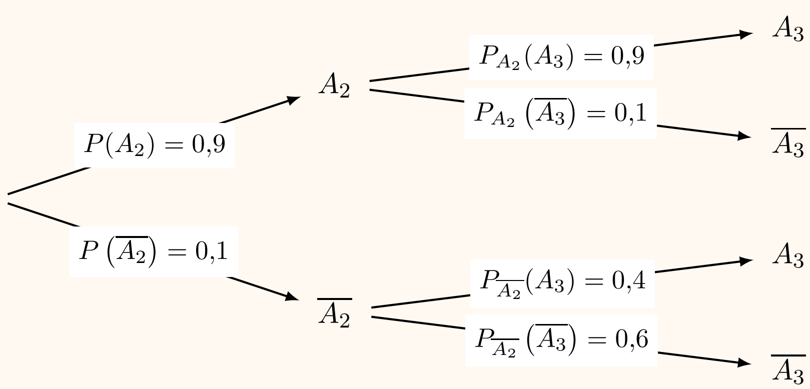
Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.
Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
- parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».
On a ainsi $p(A_1) = 1$.

Corrigé

1.a. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.



1.b. Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.
Les évènements A_2 et $\overline{A_2}$ formant une partition de l'univers, on a d'après la formule des probabi-

lités totales :

$$\begin{aligned}
P(A_3) &= P(A_3 \cap A_2) + P\left(A_3 \cap \overline{A_2}\right)\\
P(A_3) &= P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P\left(\overline{A_2}\right) \times P_{\overline{A_2}}(A_3)\\
P(A_3) &= 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}4\\
P(A_3) &= 0{,}81 + 0{,}04\\
P(A_3) &= \underline{0{,}85}
\end{aligned}$$

1.c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ? Arrondir au centième.
La probabilité cherchée est $P_{A_3}(A_2)$ soit :

$$\begin{aligned}
P_{A_3}(A_2) &= \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)}\\
&= \frac{0,9 \times 0,9}{0,85}\\
&= \frac{81}{85}\\
P_{A_3}(A_2) &\approx \underline{0,95}
\end{aligned}$$

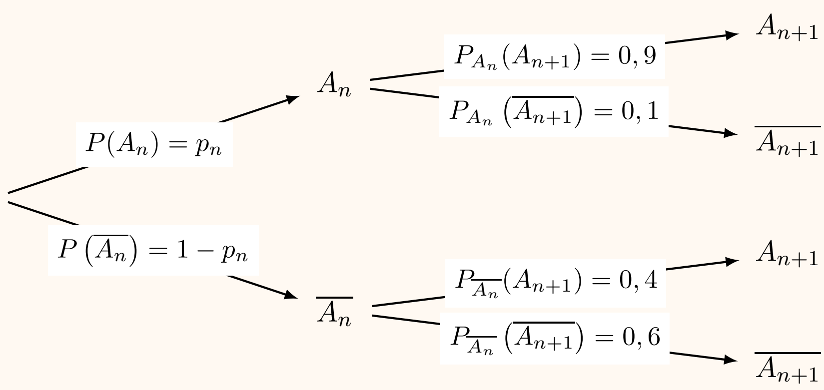
Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4.$$

Corrigé

On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



Les évènements (A_n) et $\left(\overline{A_n}\right)$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales on a pour n entier, $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
p_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right)\\
&= 0,9p_n + 0,4(1 - p_n)\\
p_{n+1} &= \underline{0,5p_n + 0,4}
\end{aligned}$$

3.

3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0,8$.

Corrigé

Notons pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ le postulat

$$(P_n) \ : \ p_n > 0,8$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$, le postulat (P_1) est vrai puisque : $p_1 = 1 > 0,8$.
- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.
  D'après la question (B.2.) on a :

  $$p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$$

  On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que $p_n > 0,8$, on a alors :

  $$p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4 > 0,5 \times 0,8 + 0,4 = 0,8$$

  On a alors montré que $p_{n+1} > 0,8$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.
- **Conclusion**
  On a montré que (P_1) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geqslant 1$.

$$\boxed{p_n > 0,8}$$

3. b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

Corrigé

Pour n entier, $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= 0,5p_n + 0,4 - p_n \\ &= -0,5p_n + 0,4 \\ &= 0,5\left(-p_n + 0,8\right) \end{aligned}$$

Or on vient de montrer dans la question (B.3.a) que $p_n > 0,8$ donc pour n entier, $n \geqslant 1$

$$p_n > 0,8 \Longrightarrow (-p_n + 0,8) < 0$$

Donc

$$0,5\left(-p_n + 0,8\right) < 0 \Longleftrightarrow p_{n+1} - p_n < 0$$

La suite (p_n) est décroissante.

3. c. La suite (p_n) est-elle convergente ?

Corrigé

La suite (p_n) est décroissante et minorée par 0,8, elle est donc convergente vers $L \geqslant 0,8$.

4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$v_n = p_n - 0,8.$$

4. a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.

Corrigé

Les suites (p_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(p_n) : \begin{cases} p_1 & = 1 \\ p_{n+1} & = 0.5 \times p_n + \ 0{,}4 \end{cases} \qquad \Bigg| \qquad (v_n) : \begin{cases} v_1 & \\ v_n & = p_n \ -0{,}8 \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= p_{n+1} \ -0{,}8 \\
v_{n+1} &= (0{,}5\, p_n + \ 0{,}4) \ -0{,}8 \\
v_{n+1} &= 0{,}5 \times p_n \ -0{,}4 \\
v_{n+1} &= 0{,}5 \times \left(p_n + \frac{-0{,}4}{0{,}5}\right) \\
v_{n+1} &= 0{,}5 \times (p_n \ -0{,}8) \\
v_{n+1} &= 0{,}5 \times v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$, et de premier terme $v_1 = 0{,}2$ puisque :

$$\begin{aligned}
v_1 &= p_1 \ -0{,}8 \\
v_1 &= 1 \ -0{,}8 \\
v_1 &= 0{,}2
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_1 & = 0{,}2 \\ v_{n+1} & = 0{,}5 \times v_n \end{cases} \ ; \ \forall n \geqslant 1}$$

4. b. Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$p_n = 0,8 + \frac{2}{5} \times 0,5^n.$$

Corrigé

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}5$, et de premier terme $v_1 = 0{,}2$ donc son terme général est

$$\forall n \geqslant 1 \ ; \ v_n = v_1 \times (q)^{n-1}$$

Soit

$$\boxed{\forall n \geqslant 1\ ;\ v_n = 0{,}2 \times (0{,}5)^{n-1}}$$

De l'égalité définie pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$v_n = p_n - 0{,}8$$

On peut en déduire l'expression :

$$p_n = v_n + 0{,}8$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1\ ;\ p_n = 0{,}2 \times (0{,}5)^{n-1} + 0{,}8}$$

On a alors pour n entier, $n > 0$:

$$p_n = 0,2 \times 0,5^{-1} \times 0,5^n + 0,8 = 0,8 + 0,4 \times 0,5^n$$

Soit pour tout $n \geqslant 1$,

$$\boxed{p_n = 0,8 + \frac{2}{5} \times 0,5^n}$$

4. c. Déterminer la limite de la suite (p_n). Interpréter le résultat.

Corrigé

Théorème 1

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Ici $-1 < q = 0,5 < 1$ et d'après le théorème 1 on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,5)^n = 0$. Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} 0,2 \times (0,5)^{n-1} = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \Big(\underbrace{0,2 \times (0,5)^{n-1} + 0,8}_{p_n}\Big) = 0,8$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (p_n) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = 0{,}8}$$

Cela signifie qu'à long terme, la probabilité qu'un client achète un melon sera de 0,8.

Exercice 2. 9.25 points

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :

V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

G : « la personne a contracté la grippe ».

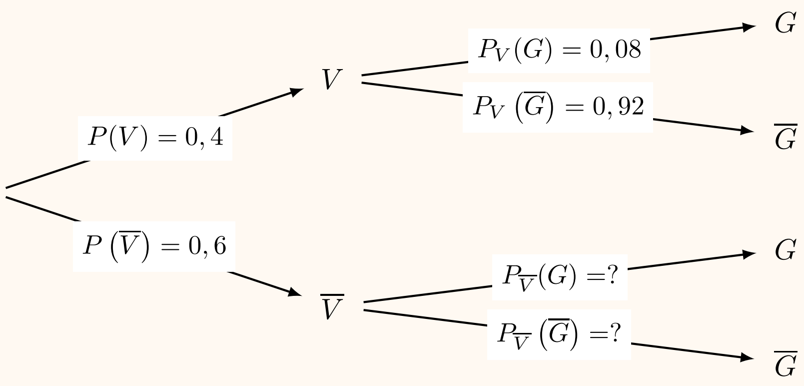
1.

1. a. Donner la probabilité de l'évènement G.

Corrigé
20% de la population a contracté la grippe donc $\underline{P(G) = 0,2}$.

1. b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.

Corrigé



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

Corrigé

La probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée est :

$$P(G \cap V) = 0,4 \times 0,08 = \underline{0,032}$$

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à $0,28$.

Corrigé

Sachant que la personne choisie n'est pas vaccinée, la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est d'après la formule de Bayes :

$$P_{\overline{V}}(G) = \frac{P\left(\overline{V} \cap G\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \frac{P\left(\overline{V} \cap G\right)}{0,6}$$

- Calculons $P\left(\overline{V} \cap G\right)$.
  Les évènement V et $\overline{V}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales on a :

  $$P(G) = P(G \cap V) + P\left(\overline{V} \cap G\right) \Longleftrightarrow 0,2 = 0,032 + P\left(\overline{V} \cap G\right)$$

  Donc
  $$P\left(\overline{V} \cap G\right) = 0,2 - 0,032 = \underline{0,168}$$

- Conclusion :
  $$P_{\overline{V}}(G) = \frac{0,168}{0,6} = \underline{0,28}$$

  La personne choisie n'est pas vaccinée. La probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28

Remarque historique

Thomas Bayes $(1702 - 1761)$ est un mathématicien britannique et pasteur de l'Église presbytérienne, connu pour avoir formulé le théorème de Bayes.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.
Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.
Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à $0,4$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

Corrigé

Modélisation
Il y a répétition de $n = n$ événements indépendants et identiques (on tire un habitant).
Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :

- succès de probabilité $p = 0,4$ quand un habitant est vacciné ;
- et échec de probabilité $1 - p = 0{,}6$ sinon.

Donc la variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès au cours de ces n épreuves *indépendantes* de *Bernoulli* de paramètre $p = 0,4$ suit une *loi binomiale* de paramètres $n = n$ et $p = 0,4$.
On peut écrire :

$$X \text{ suit } \mathcal{B}\left(n\ ;\ 0,4\right) \text{ ou } X \sim \mathcal{B}\left(n\ ;\ 0,4\right).$$

2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.

2. a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.

Corrigé

Puisque X suit une loi Binomiale de paramètre $n = 40$ et $p = 0,4$ on a :

$$P\left(X = k\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{40}{k} \times 0,4^k \times (0{,}6)^{40-k}$$

Et donc

$$p\left(X = 15\right) = \binom{40}{15} \times 0,4^{15} \times 0{,}6^{25}$$

Soit :

$$\boxed{p\left(X = 15\right) \approx 0.123}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.binomDdP* $(\ 40\ ,\ 0,4\ ,\ 15\ ) \approx 0{,}123$
- *Sur TI82/83+ : Menu Distrib* $\Rightarrow$ *binomFdp* $(\ 40\ ,\ 0,4\ ,\ 15\ ) \approx 0{,}123$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu Opt/STAT/DIST/DINM* $\Rightarrow$ *binomialPD* $(\ 15\ ,\ 40\ ,\ 0,4\ ) \approx 0{,}123$
- *Sur Numworks : Menu probabilité*

2. b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

Corrigé

La probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée est, en passant à l'évènement contraire : vaccinée est $P(X \geqslant 20)$ soit

$$P(X \geqslant 20) = 1 - P(X \leqslant 19) \approx \underline{0,13}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.binomFdR* $(40\ ,\ 0,4\ ,\ 19) \approx 0{,}870\,23$
- *Sur TI82/83+ : Menu Distrib* $\Rightarrow$ *binomFrép* $(40\ ,\ 0,4\ ,\ 19) \approx 0{,}870\,23$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu Opt/STAT/DIST/DINM* $\Rightarrow$ *binomialCD* $(19\ ,\ 40\ ,\ 0,4) \approx 0{,}870\,23$

2. c. Déterminer la probabilité qu'entre 5 à 10 des personnes interrogées soient vaccinées.

Corrigé

La probabilité qu'entre 5 à 10 des personnes interrogées soient vaccinées est :

$$P(5 \leqslant X \leqslant 10) = P(X \leqslant 10) - P(X \leqslant 4) \approx \underline{0,035}$$

2. d. Déterminer l'espérance de la variable X et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

Corrigé

L'espérance de la variable X est $E(X) = np = 40 \times 0,4 = 16$. Cela signifie qu'en moyenne, 16 personnes sur les 40 interrogées seront vaccinées.

3. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.

3. a. Déterminer le nombre minimal de personnes à interroger pour qu'en moyenne, au moins 100 soient vaccinées.

Corrigé

L'espérance de la variable X est $E(X) = np = 0,4n$. Pour qu'en moyenne, au moins 100 soient vaccinées il faut que :

$$0,4n \geqslant 100 \iff n \geqslant 250$$

Le nombre minimal de personnes à interroger pour qu'en moyenne, au moins 100 soit vaccinées est donc de 250.

3. b. Exprimer $P(X = 0)$ en fonction de n.

Corrigé

$$P\,(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \times 0,4^k \times 0,6^{n-k}$$

Donc

$$\boxed{P(X = 0) = 0,6^n}$$

3. c. Déterminer le nombre minimal de personnes à interroger pour que la probabilité de l'évènement « au moins une des n personnes interrogées a été vacciné » soit supérieure à 0,99.

Corrigé

La probabilité de l'évènement « au moins une des n personnes interrogées a été vacciné » est $P(X \geqslant 1)$. Or on a : $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$ et donc :

$$P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 \iff 1 - P(X = 0) \geqslant 0,99 \iff P(X = 0) \leqslant 0,01$$

Il faut donc résoudre l'inéquation : $0,6^n \leqslant 0,01$.

On pourra utiliser la fonction logarithme plus tard mais ici, la calculatrice suffisait. On montre rapidement que la suite de terme général $u_n = 0,6^n$ est strictement décroissante. Par ailleurs :

$$\begin{cases} 0,6^9 > 0,01 \\ 0,6^{10} < 0,01 \end{cases} \implies n \geqslant 10$$

De ce fait, le nombre minimal de personnes à interroger pour que la probabilité de l'évènement « au moins une des n personnes interrogées a été vacciné » soit supérieure à 0,99 est de <u>10 personnes</u>.

Fin du devoir