



Math93.com

# Devoir Surveillé n°B2

## TS

### Probabilités conditionnelles et loi binomiale

Durée 1,25 heure - Coeff. 6

Noté sur 20 points

| BARÈME (sur 20 points)    | Note |
|---------------------------|------|
| Exercice 1 : 10.75 points |      |
| Exercice 2 : 9.25 points  |      |
| <b>Total</b>              |      |

### Exercice 1.

**10.75 points**

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
- parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour  $n \geq 1$ , on note  $A_n$  l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine  $n$  ».

On a ainsi  $p(A_1) = 1$ .

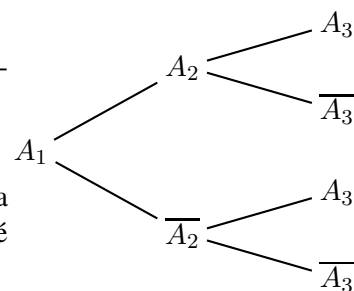
1.

1. a. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.

1. b. Démontrer que  $p(A_3) = 0,85$ .

1. c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ?

Arrondir au centième.



Dans la suite, on pose pour tout entier  $n \geq 1$  :  $p_n = P(A_n)$ . On a ainsi  $p_1 = 1$ .

2. Démontrer que, pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4.$$

3.

3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 1$  :  $p_n > 0,8$ .

3. b. Démontrer que la suite  $(p_n)$  est décroissante.

3. c. La suite  $(p_n)$  est-elle convergente ?

4. On pose pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$v_n = p_n - 0,8.$$

4. a. Démontrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on donnera le premier terme  $v_1$  et la raison.

4. b. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

En déduire que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$p_n = 0,8 + \frac{2}{5} \times 0,5^n.$$

4. c. Déterminer la limite de la suite  $(p_n)$ . Interpréter le résultat.

**Exercice 2.**

**9.25 points**

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville. La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

**Partie A**

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.

Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :

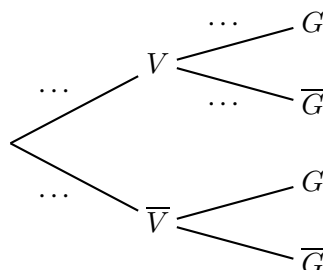
$V$  : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

$G$  : « la personne a contracté la grippe ».

1.

1. a. Donner la probabilité de l'évènement  $G$ .

1. b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

**Partie B**

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à  $10^{-3}$  près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard  $n$  habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à  $n$  tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les  $n$  interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire  $X$  ?
2. Dans cette question, on suppose que  $n = 40$ .
  2. a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.
  2. b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.
  2. c. Déterminer la probabilité qu'entre 5 à 10 des personnes interrogées soient vaccinées.
  2. d. Déterminer l'espérance de la variable  $X$  et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.
3. Dans cette question,  $n$  est un entier naturel non nul.
  3. a. Déterminer le nombre minimal de personnes à interroger pour qu'en moyenne, au moins 100 soient vaccinées.
  3. b. Exprimer  $P(X = 0)$  en fonction de  $n$ .
  3. c. Déterminer le nombre minimal de personnes à interroger pour que la probabilité de l'évènement « au moins une des  $n$  personnes interrogées a été vacciné » soit supérieure à 0,99.

↵ **Fin du devoir** ↵