



Math93.com

Devoir Surveillé n°B3-Bis

TS Bilan

Durée 3 heures - Coeff. 14

Noté sur 20 points

BARÈME (sur 20 points)	Note
Exercice 1 : 9 points	
Exercice 2 : 6 points	
Exercice 3 : 5 points	
Total	

Exercice 1.

9 points

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{80}t} \right)$$

où

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C .

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.

Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$C(t) = 12 \left(1 - e^{-\frac{7}{80}t} \right).$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0 ; +\infty[$.
2. Déterminer la limite de C en $+\infty$.
3. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

Partie B : étude de fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{105}{x} \left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right).$$

Démontrer que, pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x}{40}e^{-\frac{3}{40}x} + e^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

2. On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0	-1

En déduire le sens de variation de la fonction f .

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ afin de valider le tableau de variations donné.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1 ; 80]$.
En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 15.

Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairance a de ce patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit d à 105, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.

On rappelle que la fonction C est définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

1. On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.
1. a. Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.
1. b. Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang ; elle est égale à 5,9 micromole par litre.
Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.
2. Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.

Exercice 2.**6 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . À tout point M d'affixe z , on associe le point M' d'affixe

$$z' = -z^2 + 2z.$$

Le point M' est appelé image du point M .

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation :

$$-z^2 + 2z - 2 = 0.$$

En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

2. Soit M un point d'affixe z et M' son image d'affixe z' .

On note N le point d'affixe $z_N = z^2$.

Montrer que M est le milieu du segment $[NM']$.

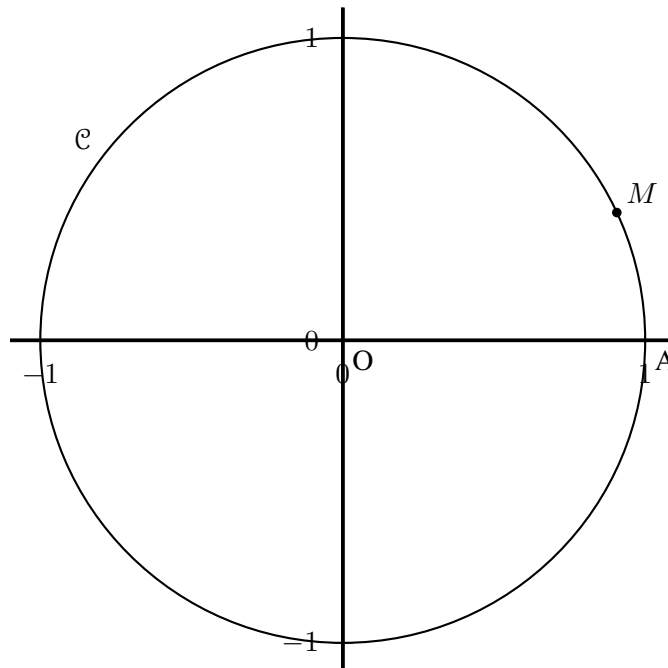
3. Dans cette question, on suppose que le point M ayant pour affixe z , appartient au cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1. On note θ un argument de z .

3. a. Déterminer le module de chacun des nombres complexes z et z_N , ainsi qu'un argument de z_N en fonction de θ .

3. b. Sur la figure donnée ci-dessous, on a représenté un point M sur le cercle \mathcal{C} .

Construire sur cette figure les points N et M' en utilisant une règle et un compas (on laissera les traits de construction apparents).

3. c. Soit A le point d'affixe 1. Quelle est la nature du triangle AMM' ?



Exercice 3.**5 points**

On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par

$$z_n = \frac{1 + i}{(1 - i)^n}.$$

On se place dans le plan complexe d'origine O .

1. Un exemple.
 1. a. Donner la forme exponentielle de $1 + i$ et $1 - i$.
 1. b. Déterminer les formes exponentielles de z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 .
2. Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n .
 2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $\frac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.
 2. b. Démontrer alors que, pour tout entier naturel n , les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.
3. Pour quelles valeurs de n le nombre z_n est-il réel?

↩ **Fin du devoir** ↪