Math93.com

Devoir Surveillé n°B3
Correction

TS
Bilan
Durée 3 heures - Coeff. 14
Noté sur 20 points

BARÈME (sur 20 points)	Note
Exercice 1 : 5 points Exercice 2 : 8.25 points Exercice 3 : 6.75 points	
Total	

Exercice 1. Vrai ou faux — 5 points

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Affirmation 1

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation (E) : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
On note A et B les points du plan dont les affixes sont les solutions de (E).
On note O le point d'affixe 0.
Affirmation 1 : Le triangle OAB est équilatéral.

Corrigé

L'équation (E) est une équation du second degré, de discriminant :

$$\Delta = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -4 = (2\,\mathrm{i})^2 < 0$$

Les racines sont les complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}}{2} = \sqrt{3} - \mathrm{i} \;\text{ et }\; z_2 = \overline{z_1}$$

En notant A et B les points d'abscisses z_1 et z_2 on a alors :

$$\begin{cases} OA^2 = |z_1|^2 = 3 + 1 = 4 \\ OB^2 = |\overline{z_1}|^2 = 4 \\ AB^2 = |\overline{z_1} - z_1|^2 = |2\,\mathrm{i}|^2 = 4 \end{cases}$$

Donc OAB est équilatéral.

Affirmation 2

On note u le nombre complexe : $u = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et on note $\overline{u}$ son conjugué.
Affirmation 2 : $u^{2020} + \overline{u}^{2020} = -2^{2020}$

Corrigé

On a :

$$u = \sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$$

or on a par division euclidienne : $2020 = 6 \times 336 + 4$

$$\begin{aligned}
u^{2020} &= \left(2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}\right)^{2020} \\
u^{2020} &= 2^{2020}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\dfrac{2020}{6}} \\
u^{2020} &= 2^{2020}\,\mathrm{e}^{336\,\mathrm{i}\,\pi + 2\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}} \\
u^{2020} &= 2^{2020}\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}
\end{aligned}$$

De ce fait

$$u^{2020} + \overline{u}^{2020} = 2^{2020}\left(\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}\right) = 2^{2020} \times 2\cos\left(2\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}\right)$$

Donc

$$u^{2020} + \overline{u}^{2020} = 2^{2020} \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2^{2020}$$

L'affirmation est vraie.

Affirmation 3

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
Affirmation 3 : La courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote en $+\infty$.

Corrigé

Pour tout réels x on a :

$$\begin{cases} -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \\ \mathrm{e}^{-x} > 0 \end{cases} \Longrightarrow -\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) = \cos(x)\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$$

Or

$$\lim_{X \to -\infty} \mathrm{e}^{X} = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$$

De ce fait on applique le théorème d'encadrement :

$$\begin{cases} -\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) = \cos(x)\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

Affirmation 4

Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, le nombre complexe $1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ admet pour forme exponentielle $2\cos x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

Corrigé

Pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\cos x > 0$ et par ailleurs :

$$\begin{aligned} 2\cos x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} &= 2 \times \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \\ &= 1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} \\ &\neq 1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} \text{ sauf pour } x = 0 \end{aligned}$$

L'affirmation est donc fausse.

Affirmation 5

L'équation $z^5 + z - \mathrm{i} + 1 = 0$ admet une solution réelle.

Corrigé

Supposons que l'équation admet une solution x réelle. On a alors :

$$x^5 + x - \mathrm{i} + 1 = 0 \iff \underbrace{x^5 + x + 1}_{\in\mathbb{R}} = -\mathrm{i}$$

Cela implique que i est réel ce qui est faux.
L'affirmation est donc fausse.

Exercice 2. Complexes 8.25 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique le centimètre.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(z^2-2z+4\right)\left(z^2+4\right)=0$.

Corrigé

$$\left(z^2-2z+4\right)\left(z^2+4\right)=0 \iff \left[\begin{array}{lll} z^2-2z+4 & = & 0 \\ \text{ou} & & \\ z^2+4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

- $z^2-2z+4=0 \iff (z-1)^2-1+4=0 \iff (z-1)^2=-3 \iff (z-1)^2=\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$.

Cette équation a deux solutions $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

- $z^2+4=0 \iff z^2=(2\mathrm{i})^2$: cette équation a deux solutions : $2\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$.

Conclusion : l'équation a quatre solutions :

$$\boxed{1+\mathrm{i}\sqrt{3}; \quad 1-\mathrm{i}\sqrt{3}; \quad 2\mathrm{i}; \quad -2\mathrm{i}}$$

2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}}=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_{\mathrm{B}}=2\mathrm{i}$.

2. a. Écrire z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle et justifier que les points A et B sont sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

Corrigé

- $\left|z_{\mathrm{A}}\right|^2=1+3=4=2^2 \Rightarrow \left|z_{\mathrm{A}}\right|=2$.

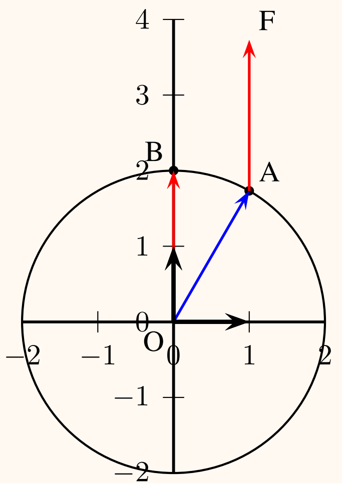
On peut écrire $z_{\mathrm{A}}=2\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$ soit en écriture exponentielle $z_{\mathrm{A}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

- $z_{\mathrm{B}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

On a donc avec les modules OA = OB = 2 : A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

2. b. Faire une figure et placer les points A et B.

Corrigé



2. c. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.

Corrigé

On a

$$\frac{z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{A}} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

Or

$$\boxed{\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \arg\frac{z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{A}} = \frac{\pi}{6}}.$$

3. On note F le point d'affixe $z_\mathrm{F} = z_\mathrm{A} + z_\mathrm{B}$.

3. a. Placer le point F sur la figure précédente. Montrer que OAFB est un losange.

Corrigé

Puisque $z_F = z_A + z_B$ on a : $z_A = z_F - z_B$ et donc en passant aux vecteurs :

$$\overrightarrow{OA}\,(z_A) = \overrightarrow{BF}\,(z_F - z_B)$$

Le quadrilatère OAFB est donc un parallélogramme.
Or on a vu lors de la question **(2.a)** que $OA = OB = 2$: le parallélogramme OAFB ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange de côtés de mesure 2.

3. b. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)$ puis de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)$.

Corrigé

- OAFB est un losange et par conséquent la droite (OF) est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ de mesure $\frac{\pi}{6}$ d'après la question **(2.c)**. De ce fait :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OF}}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}}$$

- De plus d'après la relation de Chasles :

$$\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OF}}\right)=\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OA}}\right)+\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,,\,\overrightarrow{\text{OF}}\right)$$

or

$$\begin{cases} z_A=2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \Longrightarrow \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OA}}\right)=\arg\left(z_A\right)=\dfrac{\pi}{3} \\ \left(\overrightarrow{\text{OA}}\,,\,\overrightarrow{\text{OF}}\right)=\dfrac{\pi}{12} \quad \text{d'après (3.b)} \end{cases}$$

donc

$$\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{OF}}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$$

soit

$$\boxed{\left(\overrightarrow{\text{u}}\,,\,\overrightarrow{\text{OF}}\right)=\frac{5\pi}{12}}$$

3. c. Calculer le module de z_{F} et en déduire l'écriture de z_{F} sous forme trigonométrique.

Corrigé

- On a

$$z_{\text{F}}=z_{\text{A}}+z_{\text{B}}=1+\mathrm{i}\sqrt{3}+2\mathrm{i}=1+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}+2\right)$$

Donc

$$|z_{\text{F}}|^2=1^2+\left(\sqrt{3}+2\right)^2=1+3+4+4\sqrt{3}=8+4\sqrt{3}=4\left(2+\sqrt{3}\right)$$

Et

$$\boxed{|z_{\text{F}}|=2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

- On a vu lors de la question (3.b) qu'un argument de z_{F} est

$$\arg\left(z_Z\right)=\left(\overrightarrow{\text{u}}\,,\,\overrightarrow{\text{OF}}\right)=\frac{5\pi}{12}$$

Donc l'écriture trigonométrique de z_{F} est :

$$\boxed{z_{\text{F}}=2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right)}$$

3. d. En déduire la valeur exacte de :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

Corrigé

On a vu que lors de la question précédente que :

$$\begin{cases} z_{\text{F}}=1+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}+2\right) \quad \text{question (3.c)} \\ z_{\text{F}}=2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{12}\right) \quad \text{question (3.c)} \end{cases}$$

La partie réelle de z_{F} est égale à 1 et elle est aussi égale à $2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)}\cos\dfrac{5\pi}{12}$.

Donc en égalant :

$$1 = 2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)}\cos\frac{5\pi}{12} \iff \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\times(4-3)}$$

soit

$$\boxed{\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

4. Deux modèles de calculatrice de marques différentes donnent pour l'une :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

et pour l'autre :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ces résultats sont-ils contradictoires ? Justifier la réponse.

Corrigé

Ces deux nombres sont positifs $\left(\sqrt{6} > \sqrt{2}\right)$; comparons leurs carrés :

- $\left[\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right]^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$;
- $\left[\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right]^2 = \dfrac{6+2-2\sqrt{12}}{16} = \dfrac{8-4\sqrt{3}}{16} = \dfrac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{16} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Ces deux nombres positifs ont le même carré : ils sont égaux ; les deux calculatrices donnent le résultat correct.

Exercice 3. Une loi de Newton 6.75 points

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant deux modèles. L'un, dans la partie A, utilise une suite; l'autre, dans la partie B, utilise une fonction.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = k\left(T_n - M\right)$$

où k est une constante réelle.
Dans la suite de la partie A, on choisit $M = 10$ et $k = -0,2$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} - T_n = -0,2\left(T_n - 10\right)$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?

Corrigé
Le café est chaud au départ, dans une pièce dont la température est fraiche; le café va refroidir et sa température va tendre vers celle de la pièce, donc la suite est décroissante.

2. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.

Corrigé
Pour tout n,

$$T_{n+1} - T_n = -0,2\left(T_n - 10\right) \iff T_{n+1} = \boxed{T_n - 0,2\left(T_n - 10\right) = 0,8T_n + 2}.$$

3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.

3. a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.

Corrigé
Pour tout n,

$$u_{n+1} = T_{n+1} - 10 = 0,8T_n + 2 - 10 = 0,8T_n - 8 = 0,8\left(T_n - 10\right) = 0,8u_n$$

donc $\boxed{u_{n+1} = 0,8u_n}$.
La suite (u_n) est géométrique, de raison $q = 0,8$ et de premier terme $u_0 = T_0 - 10 = 80 - 10 = 70$.

3. b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 70 \times 0,8^n + 10$.

Corrigé

On en déduit que, pour tout n, $u_n = u_0 q^n = 70 \times 0,8^n$ donc, comme $u_n = T_n - 10 \iff T_n = u_n + 10$, on a donc

$$\boxed{T_n = 70 \times 0,8^n + 10}$$

3. c. Déterminer la limite de la suite (T_n).

Corrigé

$-1 < 0,8 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$ et aussi

$$\lim_{n \to +\infty} 70 \times 0,8^n = 0$$

d'où

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} T_n = 10}.$$

4. On considère l'algorithme suivant :

```
Tant que T ⩾ 40
    T ← 0,8T + 2
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

4. a. Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n.
Quelle valeur numérique contient la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ? Expliquez pourquoi.

Corrigé

On obtient les valeurs suivantes pour la variable T : 80; 66; 54,8; 45,84; 38,672.
À la fin de l'algorithme, n vaut 4.

4. b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

$\boxed{\text{Au bout de 4 minutes, la température du café est tombée sous les 40 °C}}$.

Partie B

Dans cette partie, pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie A, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité :

$$\theta'(t) = -0,2\Big(\theta(t) - M\Big).$$

1. Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel t de cet intervalle : $\theta'(t) = -0,2\,\theta(t)$.

1. a. Si θ est une telle fonction, on pose pour tout t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $f(t) = \dfrac{\theta(t)}{\mathrm{e}^{-0,2t}}$.
Montrer que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, $f'(t) = 0$.

Corrigé

f est un quotient θ/v de fonctions dérivables et le dénominateur $v(t) = \mathrm{e}^{-0,2t}$ ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$. De ce fait, la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout réel de cet intervalle :

$$f'(t) = \frac{\theta'(t)\times \mathrm{e}^{-0,2t} - \theta(t)\times\left(-0,2\mathrm{e}^{-0,2t}\right)}{\left(\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2} = \frac{-0,2\theta(t)\mathrm{e}^{-0,2t} + 0,2\theta(t)\mathrm{e}^{-0,2t}}{\left(\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2}$$

Donc

$$\boxed{f'(t) = 0}.$$

1. b. En conservant l'hypothèse du **a.**, calculer $f(0)$.
En déduire, pour tout t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, une expression de $f(t)$, puis de $\theta(t)$.

Corrigé

- Puisque $f'(t) = 0$ pour tout t de $\mathbb{R}_+$, la fonction f est **constante**, donc, pour tout t, $f(t) = f(0) = 80$.
- De ce fait

$$f(t) = \frac{\theta(t)}{\mathrm{e}^{-0,2t}} \iff 80 = \frac{\theta(t)}{\mathrm{e}^{-0,2t}}$$

d'où

$$\boxed{\theta(t) = 80\mathrm{e}^{-0,2t}}$$

1. c. Vérifier que la fonction θ trouvée en **b.** est solution du problème.

Corrigé

$\theta(0) = 80$ et

$$\theta'(t) = 80\times\left(-0,2\mathrm{e}^{-0,2t}\right) = -0,2\theta(t)$$

donc θ est solution du problème.

2. Dans cette question, on choisit $M = 10$. On admet qu'il existe une unique fonction g dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, modélisant la température du café à tout instant positif t, et que, pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

$$g(t) = 10 + 70\mathrm{e}^{-0,2t}, \text{ où } t \text{ est exprimé en minute et } g(t) \text{ en degré Celsius.}$$

Une personne aime boire son café à 40 °C.

Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(t_0) = 40$.

Donner la valeur de t_0 arrondie à la seconde et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

Corrigé

- **Méthode 1**.
  On cherche t tel que $g(t) = 40$ soit

$$\begin{aligned} g(t) = 40 &\iff 10 + 70\mathrm{e}^{-0,2t} = 40 \\ &\iff \mathrm{e}^{-0,2t} = \frac{3}{7} \\ &\iff -0,2t = \ln\left(\frac{3}{7}\right) \\ &\iff t = \frac{\ln(3/7)}{-0,2} \approx 4,236\,\text{min} \end{aligned}$$

  Pour avoir une approximation à la seconde, on peut convertir le résultat en secondes soit :

$$t_0 = 60 \times \frac{\ln(3/7)}{-0,2} \approx 254,1894 \text{ s}$$

  On en déduit que, arrondie à la seconde, le café sera à une température de 40 degré après 254 seconde soit 4 minutes et 14 secondes.

- **Méthode 2**.
  - Existence.
    g est dérivable ; $g'(t) = 70 \times \left(-0,2\mathrm{e}^{-0,2t}\right) = -14\mathrm{e}^{-0,2t} < 0$ donc g est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
    - g est continue (dérivable donc continue ou somme, produit et composée de fonctions continues)
    - $g(0) = 80 > 40$
    - $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 10 < 40$ car

$$\lim_{t \to +\infty} (-0,2t) = -\infty$$

      donc pour composition

$$\lim_{t \to +\infty} 70\mathrm{e}^{-0,2t} = \lim_{T \to -\infty} 70\mathrm{e}^{T} = 0$$

    D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $g(t) = 40$ a au moins une solution. Comme la fonction est décroissante, cette solution est unique ; on la note t_0.
  - Valeur approchée.
    On a :

$$\begin{cases} g(4,236) \approx 40.003 > 40 \\ g(4,237) \approx 39.9969 < 40 \end{cases}$$

Or on a :

$$\begin{cases} 4,236 = 4\,\text{min} + 0,236 \times 60 \text{ s} = 4\,\text{min}\,14,16 \text{ s} \\ 4,237 = 4\,\text{min} + 0,237 \times 60 \text{ s} = 4\,\text{min}\,14,22 \text{ s} \end{cases}$$

Donc, arrondie à la seconde, t_0 est environ égale à 4 min 14 s.

– Interprétation.
Le café est à une température de 40°au bout de 4 min 14 s environ.

Fin du devoir