Math93.com

Interrogation n°1 Correction

TS

Suites et limites

Durée 55 min - Coeff. 4

Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. 9 points

1. $a_n = \left(\frac{1}{n} - 2\right)(3 + \sqrt{n})$

Corrigé

D'après les limites des fonctions de références :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

Donc par somme :

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} - 2\right) = -2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (3 + \sqrt{n}) = +\infty \end{array}\right. \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty}$$

2. $b_n = \frac{n^2 - 3n}{n^3 - n}$

Corrigé

Pour tout entier naturel n non nul :

$$b_n = \frac{n^2 - 3n}{n^3 - n} = \frac{n^2\left(1 - \frac{3}{n}\right)}{n^3\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1 - \frac{3}{n}}{n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}$$

D'après les limites des fonctions de références :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

- Pour le dénominateur : $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \end{array}\right. \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = +\infty$
- Pour le numérateur : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right) = 1$
- Et donc par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0}$

3. $c_n = n - \sqrt{n}$

Corrigé

Pour tout entier naturel n non nul :

$$c_n = n - \sqrt{n} = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Et donc

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \end{array}\right. \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty}$$

4. $\boldsymbol{d_n = \sqrt{n^2+1}}$

Corrigé

La croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ implique que pour tout entier naturel n :

$$n^2 + 1 > n^2 \Longrightarrow \sqrt{n^2+1} > \sqrt{n^2}$$

Donc pour tout entier naturel n :

$$d_n = \sqrt{n^2+1} > \sqrt{n^2} = |n| = n \text{ car } n \text{ positif}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc par théorème de comparaison :

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ d_n > n \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = +\infty}$$

5. $\boldsymbol{e_n = n(-1)^n + n^2}$

Corrigé

Pour tout entier naturel n :

$$-n + n^2 \leqslant e_n = n(-1)^n + n^2 \leqslant n + n^2$$

Et donc

$$n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -n + n^2 \leqslant e_n$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \end{array}\right. \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = +\infty$$

De ce fait par théorème de comparaison :

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = +\infty \\ n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant e_n \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = +\infty}$$

6. $\boldsymbol{f_n = \dfrac{n + \sin n}{n - \sin n}}$

Corrigé

Pour tout entier naturel n non nul :

$$f_n = \frac{n+\sin n}{n-\sin n} = \frac{n\left(1+\dfrac{\sin n}{n}\right)}{n\left(1-\dfrac{\sin n}{n}\right)} = \frac{1+\dfrac{\sin n}{n}}{1-\dfrac{\sin n}{n}}$$

Or pour tout entier n non nul :

$$\frac{-1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc par théorème d'encadrement (ou des gendarmes) :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0 \\ \dfrac{-1}{n} \leqslant \dfrac{\sin n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n} \text{ , (avec } n \geqslant 1) \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

Et donc par somme et quotient :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{\sin n}{n} = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{\sin n}{n} = 1 \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\dfrac{\sin n}{n}}{1-\dfrac{\sin n}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 1}$$

7. $\boldsymbol{g_n = \dfrac{2^n-3^n}{3^n-1}}$

Corrigé

Pour tout entier n :

$$g_n = \frac{2^n-3^n}{3^n-1} = \frac{3^n\left(-1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)} = \frac{-1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$$

Or d'après le cours sur les limite de suites géométriques de terme général q^n on a :

- puisque $-1 < \left(\dfrac{2}{3}\right) < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$;
- puisque $-1 < \left(\dfrac{1}{3}\right) < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$.

Et donc par somme et quotient :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} -1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = -1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 1 \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = -1}$$

Exercice 2. 4 points

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

1. Montrer que pour $n \geqslant 1$ on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

Corrigé

Pour $n \geqslant 1$ on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} \\ &= \frac{(n+1) - n}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} \\ u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

La croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ implique que pour tout entier naturel n :

$$n + 1 > n \Longrightarrow \sqrt{n+1} > \sqrt{n}$$

Donc :

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geqslant \sqrt{n} + \sqrt{n} = 2\sqrt{n}$$

Donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, en composant par la fonction inverse, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$: :

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n} \Longrightarrow u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Le fait que u_n soit positif est trivial donc on obtient bien, pour $n \geqslant 1$ on a :

$$\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}}$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Corrigé

Puisque

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$$

On applique alors le théorème d'encadrement (ou des gendarmes) :

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0 \\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \text{ , (avec } n \geqslant 1) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

Exercice 3. 3.5 points

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\sin 2k)^k}{n^2}$$

1. Déterminer un encadrement de v_n.

Corrigé

Pour tous entiers $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$ on a :

$$-1 \leqslant \sin 2k \leqslant 1 \Longrightarrow -1 \leqslant (\sin 2k)^k \leqslant 1$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{n^2} \leqslant v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\sin 2k)^k}{n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}$$

La somme boucle sur k de 1 à n donc en sommant les n termes on obtient :

$$n \times \frac{-1}{n^2} \leqslant v_n \leqslant n \times \frac{1}{n^2}$$

Soit

$$\boxed{-\frac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}}$$

2. Déterminer alors la limite de la suite (v_n).

Corrigé

On applique alors le théorème d'encadrement (ou des gendarmes) :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0 \\ -\dfrac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n} \text{ , (avec } n \geqslant 1) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$$

Exercice 4. 3.5 points

Soit (s_n) la suite définie pour n entier, $n > 0$ par :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{4}{5}\right)^k$$

Montrer que (s_n) est convergente et déterminer sa limite.

Corrigé

La somme s_n correspond à la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique de raison $q = -\frac{4}{5}$ et de premier terme $\left(-\frac{4}{5}\right)^0 = 1$. On obtient donc :

$$s_n = 1 \times \frac{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)} = \frac{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{\left(\frac{9}{5}\right)} = \frac{5}{9} \times \left(1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right)$$

Or d'après le cours sur les limite de suites géométriques de terme général q^n on a :

- puisque $-1 < -\left(\frac{4}{5}\right) < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{-4}{5}\right)^n = 0$.

Et donc par somme et produit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right) = 1 \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{9} \times \left(1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right) = \boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{5}{9}}$$

Fin du devoir

Question Bonus

Soit (u_n) la suite définie pour n entier, $n \geqslant 2$ par :

$$u_n = \frac{n^2}{n!}$$

Montrer que (u_n) converge. *On rappel que pour* $n > 0$ *on a* $n! = 1 \times 2 \times n$ *et* $0! = 1$.

Idée de preuve

On montre que la suite est décroissante et minorée par 0. On applique ensuite le théorème de convergence monotone pour conclure.