Math93.com

TD 0 - Terminale S
Complexes
Équations de degré 3

Remarque historique

Historiquement, les nombres complexes prennent naissance au 16esiècle.
Afin de résoudre des équations du troisième degré, les mathématicien italiens vont introduire dans leurs calculs, des "nombres" présentant des racines carrés négatives.

La méthode ici présentée est celle dite de **Cardan (1501 -1576)** , mais on devrait l'attribuer à **Niccolo Fontana Tartaglia (1499-1557)** a qui Cardan a volé la méthode. Cardan publie les formules de résolution en 1545, dans son *Ars Magna*.

C'est cependant le mathématicien italien **Scipione del Ferro (1465- 1526)**, qui a le premier trouvé une méthode de résolution d'équation de troisième degré qu'il ne publiera pas.

On va aussi s'intéresser ici à l'équation dite de Bombelli, du nom du mathématicien italien **Raphaël Bombelli (1526-1572)**. Ce dernier va utiliser les formules de "Cardan" et introduire les nombres complexes dans son *Ars Magna* de 1572.
De nombreux compléments historiques sur www.math93.com.

Première partie
Une formule pour résoudre : $x^3 = px + q$

On cherche ici à résoudre des équations de la forme, pour p et q réels :

$$x^3 = px + q$$

Exercice 1. La formule de Tartaglia-Cardan

Propriété 1 (La formule de Tartaglia-Cardan)

Soit l'équation (E) : $x^3 = px + q$.
On pose

$$\Delta' = q^2 - \frac{4p^3}{27}$$

Si $\Delta' \geq 0$, une solution de l'équation (E) est :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q-\sqrt{\Delta'}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{\Delta'}}{2}}$$

1. Vérifier avec l'équation $x^3 = 6x + 9$ que la formule fonctionne.

2. **Démonstration de la formule de Tataglia-Cardan**.
On considère l'équation :

$$(E) \quad : \quad x^3 = px + q$$

2. a. On cherche x sous la forme $x = u + v$ avec $uv = \dfrac{p}{3}$.
Montrer que l'équation (E) est équivalente à :

$$x^3 = px + q \iff \begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ u^3 v^3 = \dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

2. b. Démontrer alors que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation (E_2) :

$$(E_2) \ : \ X^2 - qX + \frac{p^3}{27} = 0$$

2. c. Résoudre l'équation (E_2) dans le cas où $\Delta' = q^2 - \dfrac{4p^3}{27} \geq 0$.

2. d. En déduire, toujours dans le cas où $\Delta' = q^2 - \dfrac{4p^3}{27} \geq 0$ une solution de l'équation (E). La formule trouvée est dite **formule de de Cardan** dans les manuels post-bac, mais nous la nommerons ici **formule de Trataglia-Cardan**, pour réhabiliter Tartaglia.
Dans la pratique, la difficulté va venir de la simplification de la racine cubique et surtout de l'expression des solutions dans le cas où $\Delta' > 0$. C'est l'ingénieux Bombelli qui va apporter une solution au problème.

Deuxième partie

Audacieux Raphaël Bombelli (1526-1572)

Remarque historique

Raphaël Bombelli (1526-1572) va utiliser la formule de Tartaglia-Cardan et faire preuve d'une audace incroyable en l'appliquant aux cas où $\Delta' = q^2 - \dfrac{4p^3}{27}$ est négatif. Cela va faire apparaître des racines carrées de nombres négatifs.
Bombelli introduit alors un nombre qu'il nomme (*più di meno*) dont le carré est égal à (-1), c'est le fameux i complexe qui sera introduit bien plus tard par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783). Bombelli effectue ses calculs en utilisant les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$ et en remplaçant i^2 par (-1) afin de retrouver les racines réelles de l'équation.

Exercice 2. Résolution de l'équation $x^3 = 15x + 4$

On va donc ici refaire les calcul de Raphaël Bombelli (1526-1572).
On considère l'équation $x^3 = 15x + 4$ dite **équation de Bombelli** car c'est avec cet exemple qu'il introduit son fameux, *più di meno*, le futur i complexe, dans son ouvrage *Ars Magna* (1572).

1. Calculer $\Delta' = q^2 - \dfrac{4p^3}{27}$ avec l'équation de Bombelli $x^3 = 15x + 4$.

2. En introduisant un nombre i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$, écrire Δ' sous la forme d'un carré.

3. Calculer alors $(2+\mathrm{i})^3$ et $(2-\mathrm{i})^3$.
On rappel que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

4. Déterminer une solution α de l'équation de Bombelli à l'aide des formules de Tartaglia-Cardan.

5. Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$x^3 - 15x - 4 = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$$

6. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation de Bombelli.

Troisième partie

Des équations de degré 3

Exercice 3. Résolution de l'équation $x^3 = 51x + 104$

Soit l'équation : $x^3 = 51x + 104$.

1. Calculer alors $(4 + \mathrm{i})^3$ et $(4 - \mathrm{i})^3$.
2. Déterminer une solution α de l'équation $x^3 = 51x + 104$ à l'aide des formules de Tartaglia-Cardan.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$x^3 - 51x - 104 = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$$

4. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3 = 51x + 104$.

Exercice 4. Résolution de l'équation $x^3 = -6x + 7$

Soit l'équation : $x^3 = -6x + 7$.

1. Déterminer une solution α de l'équation $x^3 = -6x + 7$ à l'aide des formules de Tartaglia-Cardan.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$x^3 + 6x - 7 = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$$

3. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3 = -6x + 7$.

Gerolamo Cardan (1501-1576)

Niccolo Fontana Tartaglia (1499-1557)

Fin du devoir