Math93.com

# TD 1 - Terminale S
# Complexes et forme algébrique

*Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.*
*Les autres présentent des éléments de réponses ou un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com*

## Première partie
# Opérations élémentaires dans $\mathbb{C}$

### Exercice 1. Formes algébriques

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants et préciser quels sont ceux qui sont imaginaires purs (dans $\mathrm{i}\,\mathbb{R}$) ou réels (dans $\mathbb{R}$) :

**1.** $z_1 = -5 + 7\,\mathrm{i} - (-2 + 3\,\mathrm{i})$

**2.** $z_2 = (-5 + 7\,\mathrm{i})(-2 + 3\,\mathrm{i})$

**3.** $z_3 = (3 - 2\,\mathrm{i})^2$

**4.** $z_4 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right)^2$

**5.** $z_5 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^2$

**6.** $z_6 = \mathrm{i}^{10}$

**Réponses**

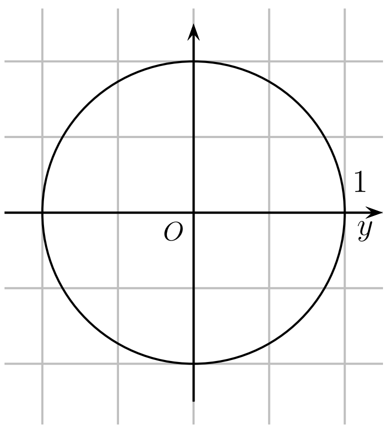
$z_1 = -3 + 4\,i$, $z_2 = -11 - 29\,i$, $z_3 = 5 - 12\,i$, $z_4 = i \in i\mathbb{R}$, $z_5 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$, $z_6 = -1 \in \mathbb{R}$

### Exercice 2. Les puissances de i

**1.** Compléter le tableau suivant :

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i^n$ | i | $\mathrm{i}^2 = -1$ | | | | | | | |

**2.** Pour $n$ entier, $n \geqslant 1$ on note $M_n$ le point d'affixe $i^n$ dans le plan complexe. Placer les points $M_1$, $M_2$, $\cdots M_9$ dans le repère ci dessous :




**3.** Calculer $\mathrm{i}^n$ selon les valeurs de $n$, entier naturel non nul.

**4.** Écrire une fonction sous python qui renvoie la valeur de $\mathrm{i}^n$ selon les valeur entières de $n$.

```
# CODE PYTHON
def puissance_de_i(n):
        '''In : n entier
           Out : i**n'''
    ...
```

## Exercice 3. Algorithmes sous python

**1. Fonction produit.**

Compléter l'algorithme suivant pour que la fonction renvoie un couple $(\Re(zz') \; ; \; \mathrm{Im}\,(zz))$ pour $z_1 = a + \mathrm{i}\, b$ et $z_2 = c + \mathrm{i}\, d$ avec $z_1$ et $z_2$ qui seront donnés sous forme de couples $(a, b)$ et $(c, d)$.

```
# CODE PYTHON
def produit(z1,z2):
        '''In : z1,z2 avec z1=(a,b) pour z1=a+ib
                et z2=(c,d) pour z2=c+id
           Out : couple ( Re(zz') , Im(zz') )'''
    return ...
```

**2. Fonction somme**. Idem pour la fonction somme :

```
# CODE PYTHON
def somme(z1,z2):
        '''In : z1,z2 avec z1=(a,b) pour z1=a+ib
                et z2=(c,d) pour z2=c+id
           Out : couple ( Re(z+z') , Im(z+z') )'''
    return ...
```

**3. Fonction inverse**. Idem pour la fonction inverse :

```
# CODE PYTHON
def somme(z):
        '''In : z avec z=(a,b) pour z=a+ib
           Out : couple ( Re(1/z) , Im(1/z) )'''
    return ...
```

## Exercice 4. Somme de termes

On pose :

$$S = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \cdots + \mathrm{i}^{2015} = \sum_{k=0}^{2015} \mathrm{i}^k$$

En utilisant le résultat de l'exercice 2, écrire la forme algébrique de $S$.

## Exercice 5. Représentation et configuration

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C et D d'affixes :

$$z_A = -3 - 3\,\mathrm{i} \; ; \; z_B = -2 + 3\,\mathrm{i} \; ; \; z_C = 5 + 5\,\mathrm{i} \; ; \; z_D = 4 - \mathrm{i}$$

**1.** Placer les point dans un repère.

2. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme et calculer l'affixe de son centre K.
3. Les points A, O, K et D sont-ils alignés ?

**Aide**

Pour montrer que 3 points M, N et P sont alignés, on peut par exemple montrer que $z_{\overrightarrow{MN}} = k\, z_{\overrightarrow{MP}}$ avec $k$ réel, ce qui revient à montrer la colinéarité des vecteurs correspondants.

## Exercice 6. Représentation et configuration

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B et D d'affixes :

$$z_A = -3 - \mathrm{i}\ ;\ z_B = 1 + 3\,\mathrm{i}\ ;\ z_D = 2 - 3\,\mathrm{i}$$

1. Placer les points dans un repère.
2. Déterminer l'affixe du point C tel que ABCD soit un parallélogramme.

**Réponses**

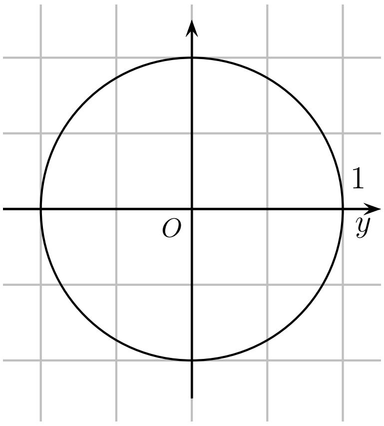
$z_C = 6 - i$

# Deuxième partie
# Opérations sur les complexes et équations

## Exercice 7. Racines cubiques de $(-1)$

Soit $\omega = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer $\omega^2$ et $\omega^3$.
2. Démontrer que $(\overline{\omega})^3 = -1$
3. Placer les points $M_k$ d'affixe $w^k$ pour $k = 1, 2, 3$ dans le plan complexe.




4. Trouver un nombre réel dont le cube vaut $(-1)$. Montrer qu'il n'y en a pas d'autres.

**Aide**

- Pensez à la monotonie de la fonction cube sur $\mathbb{R}$.

**5.** Trouver 3 nombres complexes dont le cube vaut $(-1)$.

**6.** Pour montrer qu'il n'y en a pas d'autres, on peut par exemple prouver que pour tout complexe $z$ on a :

$$z^3 + 1 = (z+1)(z-\omega)\,(z-\overline{\omega})$$

## Exercice 8. Équations

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2\,\mathrm{i}\,z+4=-3z+\mathrm{i}$
2. $z+2\overline{z}=3-4\,\mathrm{i}$
3. $\dfrac{z}{1+2\,\mathrm{i}}=\mathrm{i}+\dfrac{1}{1-2\,\mathrm{i}}$
4. $\dfrac{z}{1+2\,\mathrm{i}}=\mathrm{i}\,\overline{z}+1$
5. $z^2+2\,\mathrm{i}=z\overline{z}+z$
6. $\mathrm{i}\,z-3=2\overline{z}$
7. $z+2\,\mathrm{i}=\dfrac{z+1}{2+\mathrm{i}}$

**Réponses**

1. $z=-\dfrac{10}{13}+\dfrac{11}{13}i$
2. $z=1+4\,i$
3. $z=-\dfrac{13}{5}+\dfrac{9}{5}i$
4. $z=\dfrac{1}{10}+\dfrac{7}{10}i$
5. $z=2\,i$
6. $z=-2+i$
7. $z=-\dfrac{1}{2}-i\,\dfrac{7}{2}$

## Exercice 9. Résolution de systèmes

Résoudre les systèmes :

1. $(S)\ :\ \begin{cases}2z_1+z_2=4\\ 2\,\mathrm{i}\,\overline{z_1}+\overline{z_2}=0\end{cases}$
2. $(S)\ :\ \begin{cases}z_1+\overline{z_2}=1+5\,\mathrm{i}\\ \overline{z_1}+2\,\mathrm{i}\,z_2=7-2\,\mathrm{i}\end{cases}$
3. $(S)\ :\ \begin{cases}\overline{z_1}-\mathrm{i}\,\overline{z_2}=2\\ 3\,\mathrm{i}\,z_1+2\,\mathrm{i}\,z_2=-9\end{cases}$

**Réponses**

1. ?
2. $\begin{cases}z_1=1+2\,i\\ z_2=-3\,i\end{cases}$
3. $\begin{cases}z_1=2+3\,i\\ z_2=-3\end{cases}$

## Exercice 10. Propriété du cours

Démontrer la propriété suivante :

**Propriété 1**

Pour tout complexe $z$ et tout entier naturel $n$ non nul on a :

$$\boxed{\overline{(z^n)}=\left(\overline{z}\right)^n}$$

## Exercice 11. Racines conjuguées

Soit $P(z)=z^3-3z^2+4z-12$ pour $z\in\mathbb{C}$.

1. Montrer que pour tout complexe $z$ on a : $\overline{P(z)}=P\left(\overline{z}\right)$.
2. Vérifier que $(-2\,\mathrm{i})$ est solution de l'équation $P(z)=0$.
3. En déduire que $2\,\mathrm{i}$ est aussi une solution de l'équation $P(z)=0$.

### Exercice 12. Racines conjuguées 2

Soit $(E)$ l'équation $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$.

1. Démontrer que si $z$ est une solution de l'équation $(E)$, alors $\overline{z}$ est également une solution de $(E)$.
2. Montrer que $1$ et $\mathrm{i}$ sont des solutions de $(E)$.
   Donner une troisième solution de $(E)$.

## Troisième partie

# Déterminer et utiliser le module d'un complexe

### Exercice 13. Cercle et médiatrice

On se place dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

1. Les points C et D sont d'abscisses respectives $(1 + 4\,\mathrm{i}\,)$ et $(2 - \mathrm{i}\,)$. Déterminer la distance CD.
2. Soit A un point du cercle de centre le point O et de rayon 3. Soit $z$ son affixe, que vaut $z\overline{z}$ ?
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe $z$ tels que :

   **3. a.** $|z - 1 - 4\,\mathrm{i}\,| = 3$
   **3. b.** $|z - 1 - 4\,\mathrm{i}\,| = |z - 2 + \mathrm{i}\,|$

**Réponses**

*On se place dans le repère orthonormée* $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

1. $CD = \sqrt{26}$ *u.l..*
2. $z\overline{z} = 9$ .
3. **3. a.** $\mathcal{C}\,(C\,;\,3)$.
   **3. b.** *Médiatrice de [CD].*

### Exercice 14. Étude de configurations 1

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Soit A et B les points d'affixes respectives $(2 - 5\,\mathrm{i}\,)$ et $(7 - 3\,\mathrm{i}\,)$.
Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle.

**Réponses**

$OA = AB = \sqrt{29}$ *et* $OB = \sqrt{58}$ *et avec la réciproque de Pythagore on conclut.*

### Exercice 15. Étude de configurations 2

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + \mathrm{i} \quad , \quad z_B = 3\,\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_C = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right)$$

Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

## Exercice 16. Étude de configurations 3

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Soit $M_1, M_2$ et $M_3$ les points d'affixes respectives :

$$z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i} \quad , \quad z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_3 = -2\,\mathrm{i}$$

1. Montrer que $M_1, M_2$ et $M_3$ sont situés sur un même cercle de centre O.
2. Démontrer que $OM_1M_2M_3$ est un losange.

# Quatrième partie

# Ensembles de points

## Exercice 17. Ensemble de points : avec le conjugué 1

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z$ tels que : $z^2 - \overline{z}$ soit réel.

**Réponses**

*$\mathcal{E}$ est la réunion des droites d'équation $y = 0$ (axe des réels) et $x = -\dfrac{1}{2}$.*

## Exercice 18. Ensemble de points : avec le conjugué 2 (c)

1. Démontrer la propriété :

$$Z \in \mathbb{R} \iff Z = \overline{Z}$$

2. Soit $z$ un nombre complexe différent de 2 et $Z$ le nombre complexe $Z = \dfrac{3z+1}{z-2}$.
   Déterminer l'ensemble $(E)$ des complexes $z$ pour lesquels $Z$ est réel.

## Exercice 19. Ensemble de points : avec le conjugué 3

1. Déterminer l'ensemble des réels $x$ et $y$ pour que l'on ait :

$$(2\,\mathrm{i} + 1)x + (-1 + \mathrm{i})y = 1 + 2\,\mathrm{i}$$

2. A quelle condition le nombre complexe

$$z = x + 1 + \mathrm{i}\,(-\mathrm{i}\,x + x) + 3\,\mathrm{i} - 3\,\mathrm{i}\,x$$

   est-il un réel ? un imaginaire pur ?

3. On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
   Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}\,y$ tels que le nombre complexe $Z = \dfrac{x + 1 + \mathrm{i}\,y}{x + \mathrm{i}\,(y-1)}$ soit un réel.

**Réponses**

1. *$x = 1$ et $y = 0$*
2. *$z \in \mathbb{R} \iff x = \dfrac{3}{2}$ et $z \in i\mathbb{R} \iff x = -0,5$*
3. *L'ensemble est la droite d'équation $x - y + 1 = 0$ privée du point $(0\,;\,1)$.*

## Exercice 20. Ensemble de points : avec le module 1

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Dans le plan complexe, les points C et D ont pour affixes respectives $1+4\,\mathrm{i}$ et $2-\mathrm{i}$. Déterminer la distance CD.

**Aide**
$CD = |z_D - z_C|$

2. Soit A un point du cercle de centre O et de rayon 3. Soit $z_A$ son affixe, que vaut $z_A\,\overline{z_A}$ ?
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points M d'affixe $z$ tels que : $|z-1-4\,\mathrm{i}| = 3$.
4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des points M d'affixe $z$ tels que : $|z-1-4\,\mathrm{i}| = |z-2+\mathrm{i}|$.

**Réponses**
$CD = \sqrt{26}$ *u.l.* , $z_A\,\overline{z_A} = 9$
*$\mathcal{E}_1$ est le cercle de centre C et de rayon 3. $\mathcal{E}_2$ est la médiatrice du segment [CD].*

## Exercice 21. Ensemble de points : avec le module 2

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que :

1. $|z| = z$
2. $|z| = z + \overline{z}$
3. $\left|\overline{z} + \frac{1}{3}\mathrm{i}\right| = 3$

**Réponses**

1. $S_1 = \mathbb{R}$.
2. *$S_2$ est composé des deux demi-droites d'abscisses positives et d'équations $y = \sqrt{3}\,x$ et $y = -\sqrt{3}\,x$.*
3. *$S_3$ est le cercle de centre C d'affixe $z_C = \frac{1}{3}i$ et de rayon 3.*

# Cinquième partie
# Équations du second degré ... et autres

## Exercice 22. Équations du second degré ... et autres

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + 4 = 0$
2. $-10z^2 + 2z + 1 = 0$
3. $z^4 + 6z^2 - 7 = 0$
4. $2 - z = \frac{2}{z}$
5. $\frac{1}{z^2} - \frac{4}{z} + 5 = 0$

**Réponses**

1. $z_1 = 2\,i$ *et* $z_2 = \overline{z_1}$
2. $z_1 = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}\,i$ *et* $z_2 = \overline{z_1}$
3. $S = \left\{1\,;\,-1\,;\,i\sqrt{7}\,;\,-i\sqrt{7}\right\}$
4. $z_1 = 1 - i$ *et* $z_2 = \overline{z_1}$

## Exercice 23. Équations du second degré

**1.** Développer $\left(1-\sqrt{3}\right)^2$.

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2+\left(1-\sqrt{3}\right)z+2-\sqrt{3}=0$$

**Réponses**

$$z_1=\frac{-1+\sqrt{3}-i\left(1-\sqrt{3}\right)}{2} \quad \textit{et} \quad z_2=\overline{z_1}$$

## Exercice 24. Équations du second degré et changement de variable

**1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2+4z+7=0$$

**2.** En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation .

$$(\mathrm{i}\ z+1)^2+4(\mathrm{i}\ z+1)+7=0$$

**Réponses**

**1.** $S_1=\left\{-2-i\sqrt{3}\ ;\ -2+i\sqrt{3}\right\}$

**2.** $S_2=\left\{\sqrt{3}+3i\ ;\ -\sqrt{3}+3i\right\}$

## Exercice 25. Équations du troisième degré

Soit $P(z)$ défini pour $z$ un nombre complexe par :

$$P(z)=z^3-6z^2+21z-26$$

**1.** Vérifier que pour tout nombre complexe $z$ :

$$P(z)=(z-1)(z^2-4z+13)$$

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

**Réponses**

$$S=\left\{2\ ;\ 2+3i\ ;\ 2-3i\right\}$$

## Exercice 26. Équations du troisième degré

**1.** Déterminer un entier naturel $n$ solution de l'équation :

$$(E)\quad :\quad z^3+z^2-2=0$$

**2.** Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que :

$$z^3+z^2-2=(z-n)(az^2+bz+c)$$

**3.** En déduire les solutions de l'équation $(E)$ dans $\mathbb{C}$.

**Fin du TD**

# Corrigés

## Corrigé de l'exercice 18

*Soit $z$ un nombre complexe différent de 2 et $Z$ le nombre complexe $Z = \dfrac{3z+1}{z-2}$.*

1. **Démontrer la propriété : $Z \in \mathbb{R} \iff Z = \overline{Z}$**
   Posons $Z = A + \mathrm{i}\,B$.
   - Si $Z \in \mathbb{R}$, la partie imaginaire est nulle soit $B = 0$ et donc $Z = A \in \mathbb{R}$. Alors on a $\overline{Z} = A = Z$.
   - Si $Z = \overline{Z}$, alors
   $$A + \mathrm{i}\,B = A - \mathrm{i}\,B \iff \mathrm{i}\,B = -\mathrm{i}\,B \iff 2\,\mathrm{i}\,B = 0 \iff B = 0$$
   Et donc $Z$ est réel.

2. **Déterminer l'ensemble $(E)$ des complexes $z$ pour lesquels $Z$ est réel.**
   - Méthode 1 : on pose $z = a + \mathrm{i}\,b$ et on écrit $Z$ sous forme algébrique puis on écrit que $Z$ réel si sa partie imaginaire est nulle.
   Pour $z \neq 2$ on a :
   $$\begin{aligned} Z &= \frac{3z+1}{z-2} = \frac{3(a+\mathrm{i}\,b)+1}{a+\mathrm{i}\,b-2} \\ Z &= \frac{\Big[(3a+1)+3\,\mathrm{i}\,b\Big]\Big[(a-2)-\mathrm{i}\,b\Big]}{\Big[(a-2)+\mathrm{i}\,b\Big]\Big[(a-2)-\mathrm{i}\,b\Big]} \\ Z &= \frac{(3a+1)(a-2)+3b^2+\mathrm{i}\Big[-(3a+1)b+3b(a-2)\Big]}{(a-2)^2+b^2} \end{aligned}$$
   Donc
   $$\begin{aligned} Z \in \mathbb{R} &\iff \begin{cases} z \neq 2 \\ -(3a+1)b+3b(a-2) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z \neq 2 \\ b(-3a-1+3a-6) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z \neq 2 \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$
   Donc l'ensemble $(E)$ des complexes $z$ pour lesquels $Z$ est réel est l'axe réel privé du point d'affixe 2.
   - Méthode 2 : on applique le résultat de la question (1).
   Pour $z \neq 2$ on a :
   $$\begin{aligned} Z \in \mathbb{R} &\iff Z = \overline{Z} \\ &\iff \frac{3z+1}{z-2} = \overline{\left(\frac{3z+1}{z-2}\right)} \\ &\iff \frac{3z+1}{z-2} = \frac{3\overline{z}+1}{\overline{z}-2} \iff \frac{3z+1}{z-2} - \frac{3\overline{z}+1}{\overline{z}-2} = 0 \\ &\iff \frac{(3z+1)(\overline{z}-2)-(3\overline{z}+1)(z-2)}{(\overline{z}-2)(z-2)} = 0 \\ &\iff \frac{3z\overline{z}-6z+\overline{z}-2-(3z\overline{z}-6\overline{z}+z-2)}{(\overline{z}-2)(z-2)} = 0 \\ &\iff \begin{cases} -7z+7\overline{z} = 0 \\ z \neq 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = \overline{z} \\ z \neq 2 \text{ et } \overline{z} \neq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} z \in \mathbb{R} \\ z \neq 2 \end{cases} \end{aligned}$$
   Donc l'ensemble $(E)$ des complexes $z$ pour lesquels $Z$ est réel est l'axe réel privé du point d'affixe 2.